

Tese de Doutorado

Laser de Elétrons livres: Modelo de Fluido

Quântico

Humberto Martín Silva Vásquez.

Orientador: Ricardo Magnus Osorio Galvão

Coorientador: Antonio de Padua Brito Serbeto

11 de Julho de 2016

Dedicado a todos os cientistas latino-americanos

Agradecimentos

- A meus orientadores, Professor Ricardo Galvão, pela oportunidade de trabalhar com ele e ao Professor Antonio de Padua Serbeto, por toda dedicação, paciência e força que deu para elaboração deste trabalho.
- Ao CNPQ, pelo financiamento.
- A meus pais, Humberto e Arminda, pois sem seu infinito e incondicional amor, minha vida não teria sentido.
- A Diego Gonzales Chavez porque sem seu suporte na elaboração da parte numérica este trabalho não teria tido sucesso.
- A Luiz Fernando Monteiro pelos conselhos e ajuda na elaboração desta tese.
- A Marcelo Giovanni do CBPF pela disposição para o uso do cluster.
- A Eduarda Oliva pela correção do texto.
- A Catalina Revollo sem seu amor minha vida seria muito gris e a Martina pelo fato de ser uma esperança.
- A minha irmã Marilu por toda a fê
- A meu irmão Enrique e toda sua família linda
- A Hugo Parra Fraile, pois sem seu apoio e amizade esta tese não teria se concretizado.
- A galera do CBPF, Cristofiest, Azunena, la Veke, Sadi. Habib e em especial ao Adrian, Ricardo B.
- A Daniel Reyes por seu apoio constante.

- A meus colegas de la UFF Johny, Matu, David pela cumplicidade
- A toda la galera Latina do Rio: Richin, Gabo, Ale, Poly, Lore, Osvaldo, Santi, Lore, Gabriel, Diego, Pity,TMT.
- A pessoal da UNI : cuchy cuchy, Jose Palomino, Jose Molina, Nilo,
- As secretarias do APL, Mônica e Gil.
- A Ricardo e a Bete.
- A meus grandes eternos amigos: KOKI, Samuel, Armando.

Conteúdo

Lista de figuras	6
1 Introdução	12
2 Free Eléctron Laser Clássico: descrição de partícula.	19
2.1 Regime de baixo ganho	23
2.2 Regime de alto ganho	30
2.3 O modelo Quântico	33
3 Modelo Hidrodinâmico Quântico para Free-electron Lasers	36
3.1 Transformada de Madelung e as Equações da Hidrodinâmica	40
4 Dinâmica do campo de radiação	45
5 Regime estacionário	51

	5
6 Resultados Numéricos	56
7 Conclusões	63

Lista de simbolos

Constantes fisicas:

- m_e : Masa del elétron
- c : Velocidade de la luz
- $\hbar$: cte de Planck
- λ_s : comprimento de onda da radiação saída ou emitida
- λ_w : comprimento do wiggler
- k_w : numero de onda de wiggler
- k_s : numero de onda da radiação de saída
- I_w : Intensidade do wiggler
- I_s : Intensidade da radiação de saída
- w_p : frequência do plasma
- w_s : frequência da radiação de saída

- n : densidade local do feixe na interação
- n_b : densidade inicial do feixe
- N : densidade normalizada local do feixe
- a_w : Intensidade normalizada do campo do textitwiggler
- a_s : Intensidade normalizada do campo da radiação o saída
- v_e : velocidade do elétron
- θ : variável da dinâmica, fase
- φ_0 : Fase inicial da onda de saída
- φ : Fase da onda de saída
- δ : *detuning*
- $\bar{\delta}$: *detuning* normalizado
- γ_e : energia relativística inicial do feixe
- V : Potencial ponderomotivo
- γ : Potencial ponderomotivo normalizado, fator relativístico
- P : densidade normalizada do feixe
- ϕ : potencial das cargas espaciais
- Φ : potencial normalizado das cargas espaciais

Lista de Figuras

1.1	Esquema padrão de um Laser de Elétrons Livres (Free Eletron Laser) . . .	13
1.2	Esquema do <i>microbunching</i> como mecanismo de geração de radiação coe- rente	14
2.1	Esquema de um espelho relativístico. Onda eletromagnética do <i>wiggler</i> inte- ragindo com o elétron, desde o sistema de referência que se movimenta com velocidade v_e	20
2.2	Representação da condição de coerência em um FEL clássico.	21
2.3	Esquema da interação do elétron com a radiação gerada por ele. A primeira onda está em fase com a trajetória e o elétron ganha energia da onda, a segunda é o caso oposto.	24
2.4	Evolução no espaço de fase de um FEL. Se a energia inicial do sistema é um poco maior que a energia de ressonância (γ_r), os eletrones executam uma oscilação harmônica dentro de espaço de fase dentro da <i>separatrix</i> (curva em azul). Para valores maiores de energia fora da <i>separatrix</i> os eletrones escapam do poço potencial	27

2.5	Esquema de dos tipos de regime que podem funcionar em um FEL clássico . . .	29
2.6	Comprimento de cooperação: <i>slippage</i> em um comprimento de ganho, a radiação se propaga mais rápido que os elétrons, que se comunicam com os que se encontram a uma distancia menor que o <i>slippage</i> total $S = N_w \lambda_w$	31
2.7	Esquema do mecanismo de um FEL com <i>wiggler</i> ótico	33
6.1	Potencia Relativa de Saída para diferentes valores do <i>detuning</i> $\bar{\delta}$ e fase inicial da sinal de entrada $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ e $a_w = 0.6, n_b = 1.0 \times 10^9, \gamma_0 = 60$	58
6.2	Potencia Relativa de Saída para diferentes valores do <i>detuning</i> $\bar{\delta}$ e energia inicial . $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ com $a_w = 0.6, n_0 = 1.0 \times 10^9, \varphi_0 = \pi$	60
6.3	Evolução da intensidade de saída (a) o perfil da densidade do elétron (b): $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ com $\bar{\delta} = 3.47 \times 10^{-4}$ e a fase inicial $\varphi_0 = \pi$	61
6.4	Evolução da intensidade de saída (a) o perfil da densidade do elétron (b): $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ com $\bar{\delta} = 3.47 \times 10^{-4}$ e a fase inicial $\varphi_0 = \pi$	62

Resumo

O modelo de hidrodinâmico quântico é usado para descrever a interação de um feixe de elétrons relativístico frio e não degenerado com um *wiggler* óptico tendo em conta os efeitos das oscilações de cargas e do *recoil* do elétron devido a emissão do fóton energético. Um conjunto de equações não lineares é obtido e resolvido numericamente. Os resultados numéricos obtidos são mostrados no espaço dos parâmetros e indicam que uma alta emissão de um laser de elétrons livres, na faixa dos raios γ , com intensidade da ordem do limite de Schwinger, pode ser produzida como consequência da formação de uma intensa onda de cargas espaciais(*space-charge wave*) para valores adequados da desintonia(*detuning*), da fase inicial da onda semente e da energia inicial do feixe de elétrons.

Palavras chaves: Laser de elétrons livres, Interações Laser-plasma, Intense *beams*.

Abstract

A quantum fluid model is used to describe the interaction of a nondegenerate cold relativistic electron beam with an optical wiggler taking into account the effects of the space-charge mode and electron recoil due to the emission of an energetic photon. A set of nonlinear equations is obtained and numerically solved iteratively. The numerical results are shown in the space of parameters and indicate that attaches high emission of a free-electron laser in the range of gamma rays with intensity Schwinger limit order are produced as a result of the formation of a strong space-charge wave for appropriate values of the detuning, initial phase of the seed wave, and initial energy of the beam.

Capítulo 1

Introdução

Sabe-se que o Laser de elétrons livres conhecido como Free-electron laser (FEL), concebido por Madey[1], é uma fonte de radiação eletromagnética coerente, cuja frequência pode cobrir, virtualmente, todo o espectro eletromagnético. É esta característica dos Free-electron Laser que oferece uma grande vantagem como fonte de radiação coerente, comparada com os lasers tradicionais (atômicos e moleculares), que possuem algumas limitações, em particular, monocromaticidade fixa. Na configuração padrão de um FEL (Fig 1.1), um *wiggler* magnetostático é usado para induzir um momento linear transversal em um feixe de elétrons relativístico, de modo que a energia cinética do feixe seja transformada em radiação eletromagnética. O comprimento de onda da radiação emitida obedece aproximadamente à condição de ressonância, $\lambda_s = \lambda_w/2\gamma^2$, em que λ_s , λ_w e γ são o comprimento de onda da radiação emitida, o período do *wiggler* e a energia normalizada (fator de Lorentz) do feixe relativístico, respectivamente. Assim, o comprimento de operação de um FEL não depende das características da estrutura do material que constitui o meio ativo, e sim somente do comprimento de onda do *wiggler* e da energia do feixe de elétrons, a qual pode ser variada de maneira contínua dentro de certos limites

práticos. Neste tipo de fonte de luz, é o feixe que atua como meio ativo amplificador do campo de emissão, num processo de conversão de energia cinética em energia de campo eletromagnético. Além disso, mostrou-se que uma onda eletromagnética (*optical wiggler*),

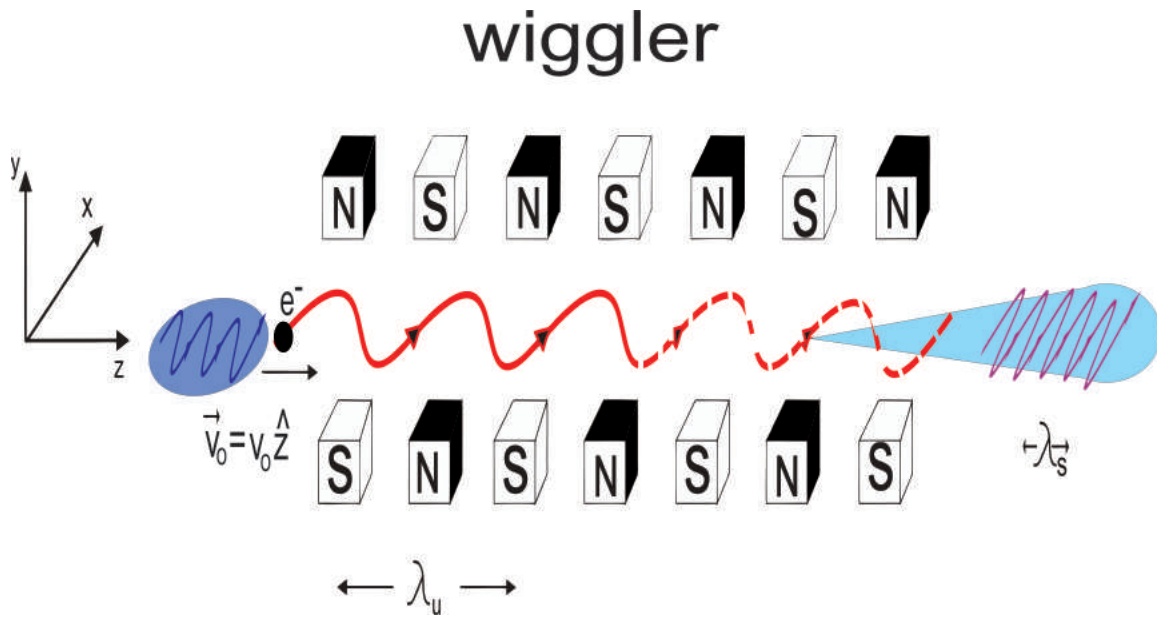


Figura 1.1: Esquema padrão de um Laser de Elétrons Livres (Free Electron Laser)

propagando-se na direção oposta ao sentido do feixe de elétrons, pode ser usada para modular o movimento transversal dos elétrons do feixe. Experimentos recentes mostram que lasers de elétrons livres podem produzir radiação coerente na faixa do ultra violeta extremo (XUV) , bem como, na dos raios X (X-Ray)[21, 22].

A extensão do intervalo de emissão dos FELs para comprimentos de onda ultra curtos, ou seja, nos limites próximos dos raios gamma, pode revolucionar radicalmente nosso modo de estudar a matéria. Estes FELs poderiam, virtualmente, atingir escalas subatômicas abrindo a porta do mundo ultra pequeno e ultra rápido.

No regime das micro-ondas, a dinâmica do FEL é descrita pelas equações do movimento de cada elétron do feixe, sob ação dos campos elétrico e magnético, e pela equação

de onda, tendo como fonte a corrente elétrica gerada pelo movimento transversal dos elétrons do feixe durante a interação. Admitindo-se que todos os poços potenciais gerados pelo batimento entre o *wiggler* e a onda eletromagnética são idênticos, no regime estacionário (*steady state*), e também que os efeitos devido ao escorregamento (*slippage*) são desprezáveis, os elétrons do feixe no poço de potencial podem ser modelados por um conjunto discreto e uniforme de macro-partículas. A interação não linear entre os elétrons e a radiação gera um agrupamento de elétrons (*bunching*) (Fig.1.2) dentro do poço de potencial eletromagnético, levando, assim, a uma emissão coletiva de radiação. Este é o mecanismo básico dos FELs. Entretanto, no limite em que o momento do fóton emitido é menor do que a variação do momento do feixe, isto é, quando a frequência é significativamente alta, esta descrição tem que ser reconsiderada. Para comprimentos de onda

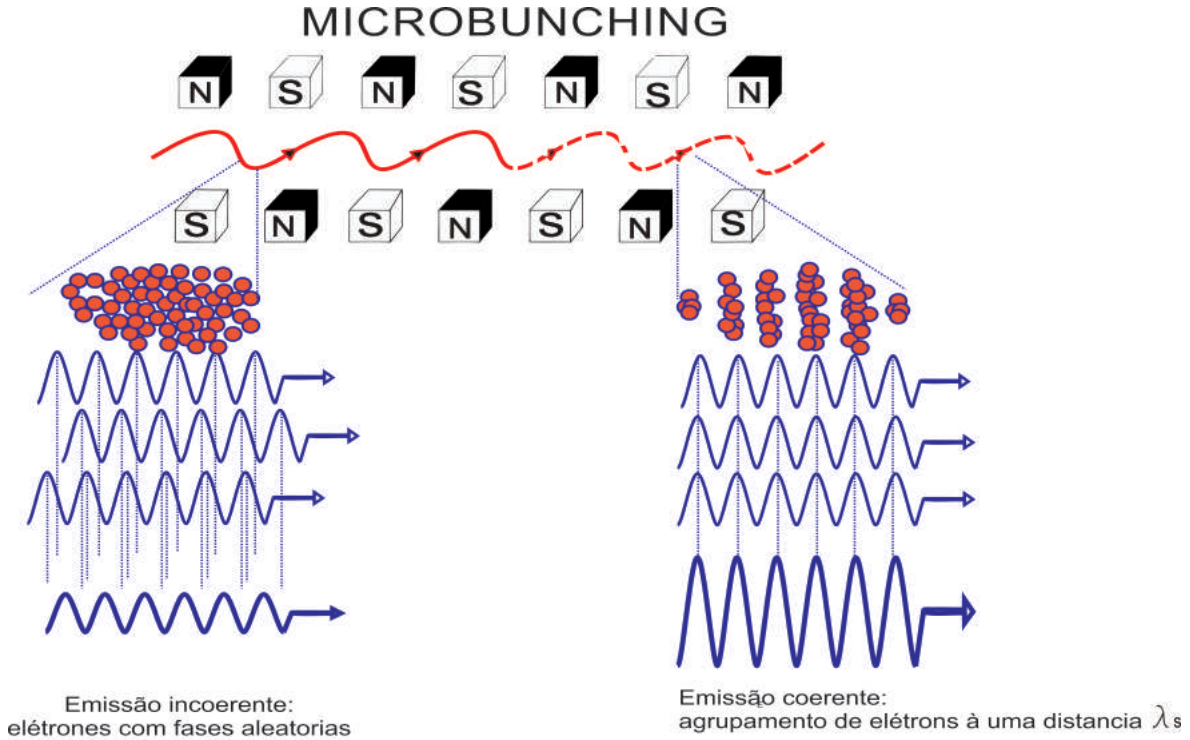


Figura 1.2: Esquema do *microbunching* como mecanismo de geração de radiação coerente

na faixa do Raio-X, por exemplo, a dimensão longitudinal do poço de potencial ponderomotivo é muito pequena. Portanto, para uma razoável densidade de elétrons do feixe, nem todos os poços de potencial são ocupados, sendo impossível encontrar mais de um elétron por poço de potencial. É neste sentido que, para se atingir novos níveis de energia e emissão de radiação para comprimentos de onda ultracurtos, é necessário que a natureza quântica do mecanismo de interação no FEL seja levada em consideração. Assim, novos e interessantes modelos quânticos têm sido propostos: Mcleever e Fedorov [22] obtiveram um conjunto de equações quânticas para um FEL a partir de uma equação tipo Klein-Gordon. Smetanin[23] mostra como um quantum FEL comporta-se como um oscilador quântico de dois níveis. Bonifacio[26] descreve um quantum FEL numa aproximação unidimensional e através da introdução do *quantum FEL parameter* consegue descrever a dinâmica dos FELs nestes regímenes. Piovella[28] usando o formalismo da função de Wigner estuda os efeitos da propagação e da difração do feixe. Serbeto[30] modela um quantum FEL pelo meio do uso de *wave-kinetics*, para descrever a instabilidade do feixe. Eliasson[32] a partir de um modelo semiclássico mostra que os efeitos quânticos num FEL são desprezíveis dominados pelos efeitos térmicos do feixe, assim, só considerados para feixes ultra frios. Finalmente seguemos o trabalho de Monteiro[31] que desenvolve as bases da descrição de fluido quântico para o feixe do FEL encontrando correções sobre o comprimento de emissão devido aos efeitos quânticos do sistema.

Nesse sentido, no aspecto experimental, diversos projetos muito interessantes estão sendo desenvolvidos em vários laboratórios de diversos países, tais como: o XFEL na Alemanha [2] com um comprimento de 3.3 km e 17 GeV para a energia do feixe; o Linac Coherent Light Source Source (LCLS) nos EUA [3]; o Spring-8 Compact SASE Source (SCSS) no Japão [4]; e talvez o mais interessante de todos, também no Japão, que é o Spring-8 Angstrom Compact free electron laser (SACLA) [5]. A tabela abaixo apresenta algumas das características destes Free-electron lasers:

Nome	Comprimento	Energia do Beam	Comprimento da onda de saída
XFEL	3.3km	17 GeV	0.05 nm
LCLS	2km	14 GeV	0.1nm
SACLA	700m	8 GeV	0.06nm

Atualmente, há 22 FELs em operação e 19 propostos para construção. É interessante notar na tabela o esforço em atingir níveis de comprimentos de onda mais curtos e, ao mesmo tempo, em reduzir as dimensões do experimento. Este é o objetivo deste trabalho; procurar novos modelos para a obtenção desta fonte coerente de luz, porém compacta.

A principal característica de um Free-electron laser, no regime que chamaremos de clássico, é o agrupamento de elétrons (*bunching*), que é o mecanismo fundamental para a geração da radiação coerente. Este agrupamento é da ordem do comprimento de onda da radiação espalhada, em que os elétrons são dirigidos pela força ponderomotiva, que resulta do "batimento" (*cross-coupling*) dos campos do *wiggler* óptico e da própria radiação espalhada. Os *wigglers* podem ser magnetostáticos ou ópticos. Este último tipo corresponde a uma onda eletromagnética (laser) propagando-se em sentido contrário ao feixe. O *wiggler* óptico apresenta vantagens sobre o magnético, visto que pode atingir muito menores comprimentos de onda, comparado com os *wigglers* magnetostáticos, que apresentam limitações técnicas em sua construção.

As teorias que descrevem os mecanismos da dinâmica dos FELs clássicos vão desde a Mecânica Clássica à Mecânica Quântica. Como já é conhecido na literatura, os primeiros modelos tinham por base a Mecânica Quântica, passando pelo Electromagnetismo mas demonstrou-se, tempos depois, que o Eletromagnetismo Clássico, juntamente com a Mecânica Clássica, pode modelar muito bem a dinâmica dos FELs operando na faixa de micro-ondas ou mesmo na faixa dos comprimentos de onda da luz visível. Porém, nos últimos anos, com a necessidade de atingir comprimentos de onda na faixa dos Raios-X/ γ ,

os efeitos quânticos, tais como o recuo (*recoil*) dos elétrons, devido a radiação emitida por eles mesmos, precisam ser considerados. Este *recoil* torna-se um aspecto relevante da dinâmica do feixe de elétrons relativístico, mas não ultra relativístico, quando o *momentum* do fóton emitido pelo elétron pode ser da mesma ordem de grandeza que o momento linear do elétron. Neste trabalho desenvolvemos um modelo teórico alternativo para estudar a dinâmica de um FEL em que o comprimento de onda da radiação estimulada pode ser ultra curto.

Primeiramente faremos uma revisão mecanismos básicos do FEL estudando as principais equações dinâmicas dentro da aproximação de regime de baixo ganho. Assim também descreveremos as principais características do chamado regime de alto ganho e suas limitações para comprimentos de onda ultracurtos para depois estudar o modelo de fluido quântico que nos propomos para este tipo de FELs.

Usando o princípio da conservação da energia para um elétron relativístico, sujeito a ação de um potencial ponderomotivo, e considerando a hipótese de envelope lentamente variável (SVEA), deduzimos uma equação Schrödinger para a função de onda dos elétrons do feixe sujeito a este potencial (gerado pela interação não linear entre o *wiggler* óptico e a radiação emitida,) levando em conta, também, o potencial de plasma que representa as oscilações das cargas do feixe (*space-charge mode*).

Determinada a equação de Schrödinger, fazemos uma transformação de Madelung para obter as variáveis dinâmicas que descrevem o modelo hidrodinâmico para o feixe elétrons relativístico. Estas equações de fluido são então acopladas às equações para a evolução dos campos eletromagnéticos (*wiggler* + radiação), bem como à equação de Poisson que descreve o potencial associado as oscilações de cargas do feixe (*space-charge mode*). Assim, obtemos um conjunto de equações não lineares acopladas e auto consistentes que descrevem um Free-electron Laser operando no regime de comprimentos de ondas ultra-

curtos, em que lidamos com flutuações contínuas na velocidade e densidade do feixe de elétrons durante a sua interação com os campos e não mais com agrupamento de elétrons (*bunching*) no poço de potencial ponderomotivo. Este conjunto de equações serão solucionadas numericamente e o conjunto dos resultados serão mostrados graficamente para o análise.

Capítulo 2

Free Eléctron Laser Clássico: descrição de partícula.

O funcionamento de um FEL possui mecanismos sofisticados que envolvem sua dinâmica e que são necessários para obter as vantagens e características próprias destes tipos de fontes de luz, tais como: alta coerência, “tunabilidade” e alto brilho. Em uma primeira aproximação, um FEL pode ser descrito como um problema unidimensional em que os efeitos transversais são desprezáveis.

Este sistema pode ser visto também como um “espelho relativista”, como esquematizado na Fig. [2.1], em que um elétron, viajando com uma velocidade relativística v_e em uma região em que se tem um *wiggler*, de comprimento de onda λ_w , “vê” o campo magnetostático do *wiggler* como se fosse uma onda eletromagnética propagando-se em sentido oposto a ele. Situando-se no sistema referencial do elétron, o comprimento de onda da “radiação” do *wiggler* será contraído pelo fator de Lorentz

$$\lambda'_w = \frac{\lambda_w}{\gamma_{\parallel}}, \quad (2.1)$$

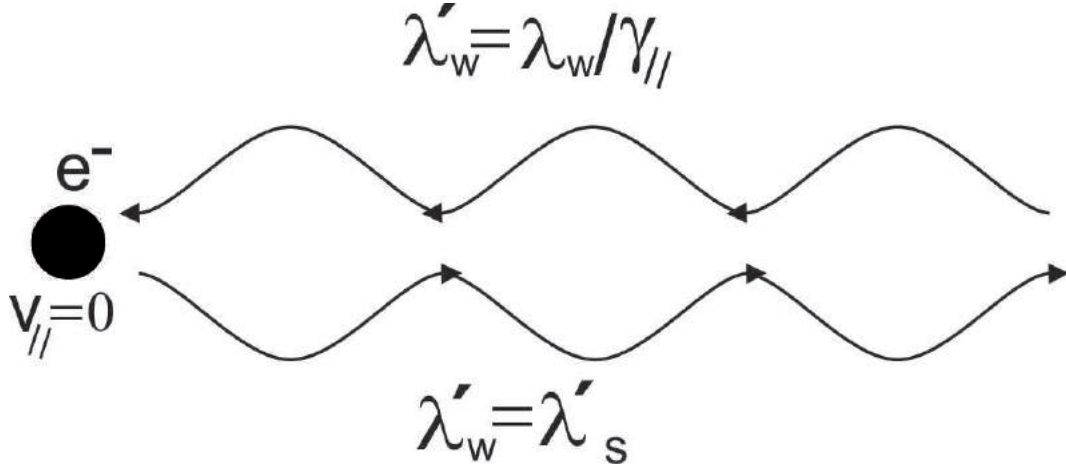


Figura 2.1: Esquema de um espelho relativístico. Onda eletromagnética do *wiggler* interagindo com o elétron, desde o sistema de referência que se movimenta com velocidade v_e .

sendo $\gamma_{||} = 1/(1 + \beta_{||}^2)^{1/2}$ e $\beta_{||} = v_e/c$. Deste modo, o elétron irá refletir elasticamente a onda eletromagnética, com um comprimento de onda $\lambda'_s = \lambda'_w$. Se voltamos para o sistema de referência do laboratório e fazendo a correspondente transformação de Doppler (*relativistic doppler shift*), obtemos, para o comprimento de onda da onda refletida, a seguinte expressão:

$$\lambda_s = \lambda'_s \left(\frac{1 - \beta_{||}}{1 + \beta_{||}} \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

que pode ser reescrita como

$$\lambda_s \simeq \frac{\lambda_w}{2\gamma_{||}^2}, \quad (2.3)$$

no limite em que $1 - \beta_{||} \ll 1$. Esta expressão mostra como este mecanismo de espelho relativístico permite modular o comprimento de onda da emissão, em princípio modificando a energia do feixe de elétrons, manifestando o que se conhece como “*tunabilidade*” (*tuning*), que é a modulação contínua do comprimento de onda.

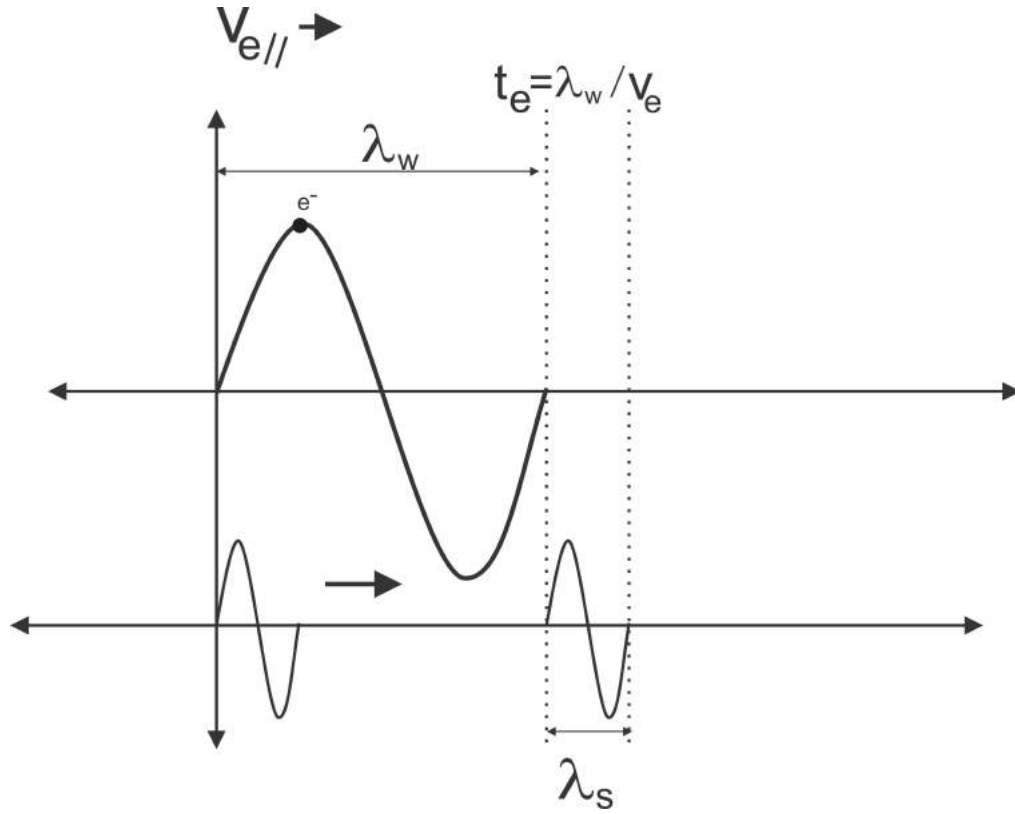


Figura 2.2: Representação da condição de coerência em um FEL clássico.

Uma outra forma de entender o FEL é através da interferência construtiva entre a trajetória do elétron e a radiação emitida, vale dizer, que o *slippage* entre o elétron e a radiação seja λ_s . O elétron descreve uma trajetória sinusoidal e emite uma onda com comprimento λ_s que estará sempre desfasada um comprimento de onda de radiação, Fig [3.2]. Essa condição de interferência construtiva pode ser expressada com a seguinte equação:

$$\lambda_w + \lambda_s = c \cdot t_e, \quad (2.4)$$

em que t_e é tempo percorrido pelo elétron em um período λ_w . Desta forma a Eq. [2.4] transforma-se em

$$\lambda_s + \lambda_w = c \cdot \frac{\lambda_w}{v_e}, \quad (2.5)$$

e

$$\lambda_s = \lambda_w(1 - \beta_{\parallel}); \quad \beta_{\parallel} = c/v_{e\parallel}. \quad (2.6)$$

Introduzindo este resultado na Eq. [2.5], obtemos

$$\lambda_s \approx \lambda_w \left(\frac{1}{2\gamma_{\parallel}^2} \right), \quad (2.7)$$

para $1 - \beta_{\parallel} \approx 1/2\gamma^2$.

A relação (2.7) coincide exatamente com a (2.3), mostrando que, em princípio, qualquer comprimento de onda do espectro eletromagnético pode ser atingido modulando o comprimento de onda do *wiggler*, λ_w , ou a energia normalizada do feixe, γ . Esta “tunabilidade” do FEL é a sua principal característica.

A natureza da “tunabilidade” de um FEL clássico pode ser entendida de um modo mais preciso a partir da dinâmica de um elétron relativístico propagando-se numa direção perpendicular ao campo magnetostático periódico pertencente ao *wiggler*. Assim pode-se demonstrar que, neste esquema, o elétron adquire uma velocidade transversal em relação a sua própria direção de propagação [7], dada por a seguinte relação:

$$|\beta_{\perp}| \simeq \frac{a_w}{\gamma}, \quad (2.8)$$

sendo $a_w = e\lambda_w/2\pi mc^2$ a amplitude normalizada do campo eletromagnético associada ao *wiggler* que também é conhecida como o parâmetro do *wiggler*. Da definição para o fator relativístico, temos que

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\perp}^2. \quad (2.9)$$

Utilizando (2.8) na expressão anterior, obtemos

$$\frac{1}{\gamma_{\parallel}^2} \simeq \frac{1 + a_w^2}{2\gamma^2}, \quad (2.10)$$

Assim, se usamos a relação [2.7], λ_s pode ser escrita do como:

$$\lambda_s \simeq \frac{\lambda_w}{2\gamma^2}(1 + a_w^2). \quad (2.11)$$

A relação que mostramos acima é a expressão mais fundamental que se tem para um Free Electron Laser, em que se vê a dependência do comprimento de onda da radiação emitida com as principais grandezas envolvidas no sistema, isto é, a energia do feixe de elétrons, γ , o período do *wiggler*, λ_w , e a sua intensidade, a_w . Esta dependência torna fácil alterar o comprimento de onda de centímetros ou milímetros para *Ångström* variando-se a energia do feixe de elétrons relativístico, γ .

2.1 Regime de baixo ganho

Nesta seção vamos dedicar ao estudo da dinâmica de um FEL no regime de baixo ganho que ocorre quando a energia do feixe de elétrons e a amplitude da radiação não mudam muito em uma passagem pelo *wiggler*. Neste caso, vamos considerar um feixe de elétron relativístico sob ação de dois campos eletromagnéticos gerados por um *wiggler* e pela própria radiação emitida pelos elétrons do feixe, a fim de descrever quais são as características e os mecanismos básicos da geração de radiação coerente na interação do feixe com estes campos. O campo do *wiggler* pode ser expresso como

$$\vec{B}_w = \nabla \times \vec{A}_w, \quad (2.12)$$

e a radiação eletromagnética co-propagante manifesta-se através de

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_s}{\partial t}, \quad (2.13)$$

sendo $A_{w(s)}$ o potencial vetor correspondente ao campo *wiggler* (radiação). As equações dinâmicas para um elétron relativístico interagindo com um campo eletromagnético são

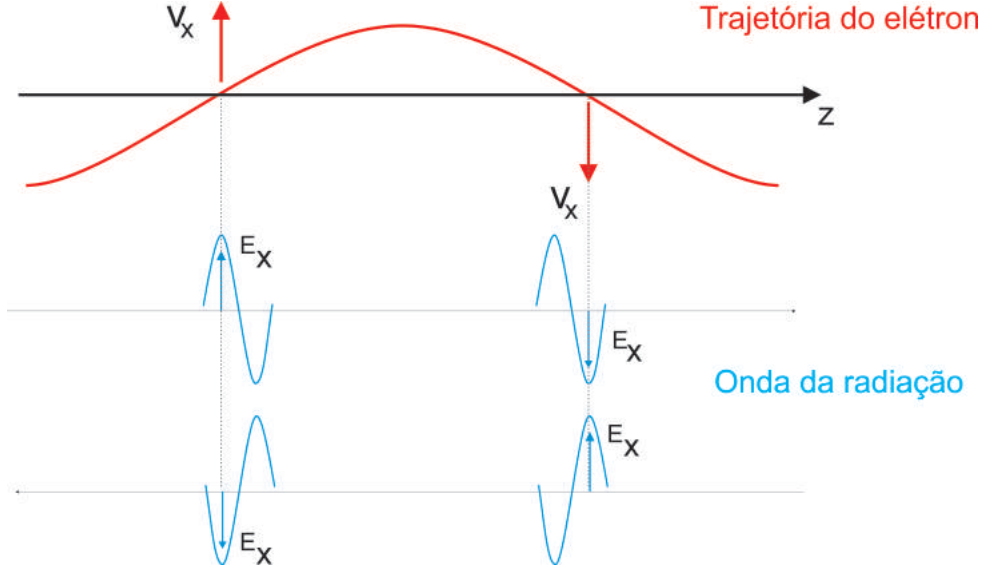


Figura 2.3: Esquema da interação do elétron com a radiação gerada por ele. A primeira onda está em fase com a trajetória e o elétron ganha energia da onda, a segunda é o caso oposto.

dadas por

$$\frac{\partial \gamma m v}{\partial t} = e \left[\vec{E} + \frac{v}{c} \times (\vec{B}_w + \vec{B}) \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \gamma m c^2}{\partial t} = e \vec{E} \cdot \vec{v}_\perp. \quad (2.15)$$

A primeira equação corresponde ao momento linear e determina a trajetória dos elétrons injetados na direção paralela ao eixo $\hat{z}$ do *wiggler* e a segunda equação corresponde à energia do elétron.

Seja $\vec{A}_s = A_s \cos(k_s z - \omega_s t) \hat{y}$ o potencial vetor associado à onda de radiação propagante, sendo k_s e ω_s o seu vetor de onda e a sua frequência, respectivamente, e seja $\vec{A}_w = A_w \cos(k_w z) \hat{y}$ o potencial vetor associado ao *wiggler* magnetostático, polarizado linearmente, de vetor de onda $k_w = 2\pi/\lambda_w$, em que λ_w é o seu período. Nesse esquema, o campo magnetostático do *wiggler* e o campo da onda de radiação induzirão um movimento transversal aos elétrons do feixe. Assim, devido a conservação do momento linear dos elétrons, na direção transversal, a velocidade transversal dos elétrons é dada pela

seguinte expressão:

$$\vec{v}_\perp = \frac{e\vec{A}}{mc\gamma}, \quad (2.16)$$

sendo $\vec{A} = \vec{A}_s + \vec{A}_w$ o campo eletromagnético total. Se substituimos este resultado na Eq.[2.15], obtemos

$$\frac{\partial\gamma mc^2}{\partial t} = -\frac{ea_w a_s}{\gamma} \cos(\theta), \quad (2.17)$$

em que

$$\theta = (k + k_s)z - \omega_s t \quad (2.18)$$

é a fase da onda ponderomotiva e $a_{w(s)} = eA_{w(s)}/mc^2$ é a amplitude do potencial vetor do *wiggler* (radiação) normalizado. A onda ponderomotiva, que é fundamental na dinâmica do sistema, é o resultado da ação combinada dos campos da onda emitida e *wiggler*. Notemos que esta onda possui um número de onda, $k_s + k_w$, e frequência igual a da radiação eletromagnética emitida, ω_s , de modo que a sua velocidade de fase é dada por:

$$v_p = \frac{\omega_s}{k_s + k_w}. \quad (2.19)$$

Usando a aproximação paraxial $d/dt \simeq v_\parallel d/dz \simeq cd/dz$, a Eq. [2.17], que descreve a variação de energia dos elétrons, adquire a seguinte forma:

$$\frac{d\gamma}{dz} = k_s \frac{a_w a_s}{\gamma} \cos(\theta). \quad (2.20)$$

No regime de baixo ganho, a energia do feixe de elétrons normalizada, γ , não muda muito e conseqüentemente, a amplitude a_s ; e a fase da radiação estimulada são quase constantes. Notemos que a variação da energia do elétron é diretamente proporcional à força ponderomotiva ($\sim a_s a_w$). Esta força está diretamente relacionada com a aceleração ($d\gamma/dt > 0$) e a desaceleração ($d\gamma/dt < 0$) das partículas do feixe e, eventualmente, com a formação de agrupamento de partículas (*bunching*) no poço de potencial. Derivando a Eq. [2.18] obtemos a seguinte expressão para a variação da fase da onda ponderomotiva:

$$\frac{d\theta}{dz} = k_w - k\left(\frac{1}{\beta_\parallel} - 1\right). \quad (2.21)$$

Assim, para que ocorra uma troca de energia entre o elétron e a radiação, a fase da onda ponderomotiva deve permanecer constante ou seja, $d\theta/dz = 0$ assim, temos que $k_s = k_w \beta_{\parallel} / (1 - \beta_{\parallel})$. Desta forma o comprimento de onda da radiação estimulada é igual a

$$\lambda_s = \lambda_w \frac{\beta_{\parallel}}{(1 - \beta_{\parallel})}, \quad (2.22)$$

no limite em que $1 - \beta_{\parallel} \ll 1$. Usando as equações [2.8] e [2.9] podemos escrever esta relação de ressonância do seguinte modo:

$$\lambda_s \simeq \lambda_w \frac{1 + a_w^2}{2\gamma^2}. \quad (2.23)$$

Esta expressão para o comprimento de onda da radiação emitida pelo FEL, junto com as equações para a energia γ , Eq. [2.20], e para a fase θ , Eq. [2.21], completam a descrição dinâmica do FEL no regime de baixo ganho.

No caso em que a radiação se propaga com o feixe de elétrons, os elétrons do feixe, que viajam através do *wiggler*, ficam em ressonância com a onda eletromagnética. Assim, podemos definir uma energia correspondente, que chamaremos de energia ressonante, dada por

$$\gamma_r = \sqrt{\frac{\lambda_w(1 + a_w^2)}{2\lambda}}, \quad (2.24)$$

logo, para elétrons injetados no *wiggler* com energia igual a energia ressonante, γ_r , a fase permanecerá constante. Usando a relação anterior, podemos reescrever a equação para fase ponderomotiva do seguinte modo:

$$\frac{d\theta}{dz} = k_w \left(1 - \frac{\gamma_r^2}{\gamma^2}\right). \quad (2.25)$$

Considerando que $\gamma \approx \gamma_r$, esta equação pode ser rescrita como

$$\frac{d\theta}{dz} = 2k_w \frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r}. \quad (2.26)$$

Derivando esta equação e fazendo uso da Eq. [2.20], obtemos a conhecida Equação do Pêndulo, que descreve a dinâmica de um FEL no regime de baixo ganho, a saber:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + K^2 \cos(\theta) = 0, \quad (2.27)$$

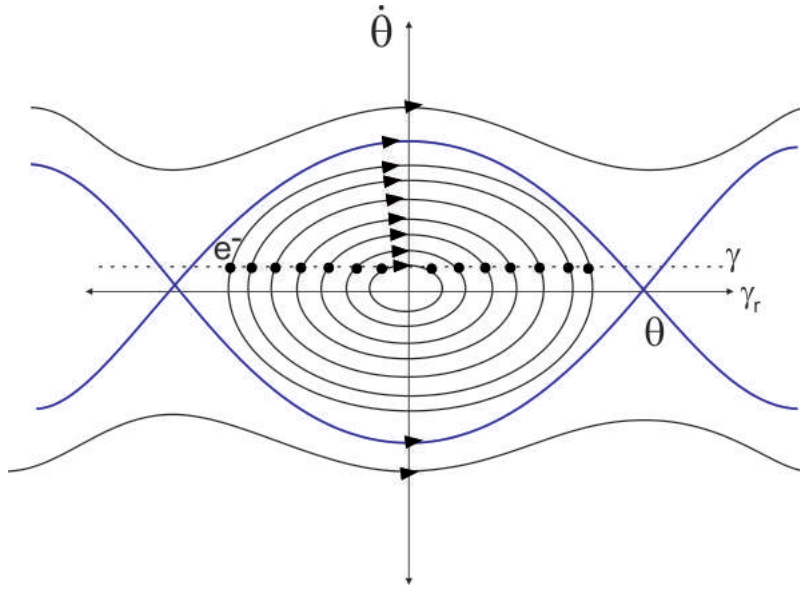


Figura 2.4: Evolução no espaço de fase de um FEL. Se a energia inicial do sistema é um pouco maior que a energia de ressonância (γ_r), os eletrões executam uma oscilação harmônica dentro de espaço de fase dentro da *separatrix* (curva em azul). Para valores maiores de energia fora da *separatrix* os eletrões escapam do poço potencial

sendo $K^2 = 2k_w k_s a_w a_s / \gamma_r$. Com esta equação mostramos, de um modo figurativo no espaço de fase $(\theta, \dot{\theta})$, a dinâmica dos elétrons dentro de um FEL. Então, se um feixe de elétrons, com uma distribuição de energia uniforme, possui uma energia $\gamma = \gamma_r$ e com uma distribuição de fase como representada na Fig. [2.3], depois de um período correspondente a uma volta no espaço de fase ou a um período λ_w , no *wiggler*, a metade dos elétrons cede energia para a onda e a outra metade extrai energia, tendo como resultado o ganho líquido nulo. Porém se $\gamma > \gamma_r$ teremos, num período, mais elétrons que cedem energia para onda que os que extraem e tendo, assim, um ganho não nulo. Podemos traduzir esta condição como uma dessintonia entre a energia do feixe e a energia de ressonante que é condição necessária para obter amplificação da onda. Em um FEL clássico sob a condição de que a amplificação da radiação, a_s , é pequena, dois modos de operação se

distinguem: (a) quando $K^2 \approx cte$, o FEL opera no chamado Regime de Baixo Ganho (*Low-Gain Regime*), que foi o regime estudado acima, ou (b) quando $K^2 \ll 1$, o Regime de Sinal Baixo (*Small Signal Regime*). O ganho da radiação, nestes processos, pode ser obtido resolvendo-se a Eq.[2.15]. Nesse sentido o ganho para um FEL é dado pela seguinte expressão [7]:

$$G(\zeta) = -G_0 \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\sin^2 \zeta}{\zeta^2} \right); \quad \zeta = \pi N_w \frac{w - w_s}{w_s}, \quad (2.28)$$

onde G_0 é uma quantidade constante proporcional à densidade de elétrons e N_w é o número de períodos no *wiggler*. Esta expressão é conhecida como Teorema de Madey [25], que mostra que a curva do ganho da radiação é a derivada negativa da curva da intensidade da radiação do *wiggler*. Os dois regimes acima mencionados têm por base que o ondulator é curto e com baixa intensidade de corrente. Os modelos teóricos usados são da interação de uma única partícula com os campos eletromagnéticos envolvidos no processo, como bem descritos na literatura existente sobre FELs.

Como já temos mostrado, o mecanismo de um FEL tem por base a interação entre os elétrons, que se movimentam com velocidades relativísticas, e a onda eletromagnética virtual do *wiggler*. Para maximizar esta interação tem-se criado diferentes mecanismos para a amplificação da radiação estimulada no processo. Neste esquema, é necessário usar cavidades ressonantes para que a radiação seja amplificada lentamente ao longo de muitas passagens da radiação pelo *wiggler*, Fig(2.5).

No Free-electron laser, o feixe de elétrons torna-se o meio ativo e a radiação coerente é emitida por *bunchings* de elétrons com dimensões dentro da escala do comprimento de onda da radiação e a saturação da radiação acontece quando os pacotes atingem a densidade máxima e emitem como verdadeiras macropartículas carregadas. O mecanismo

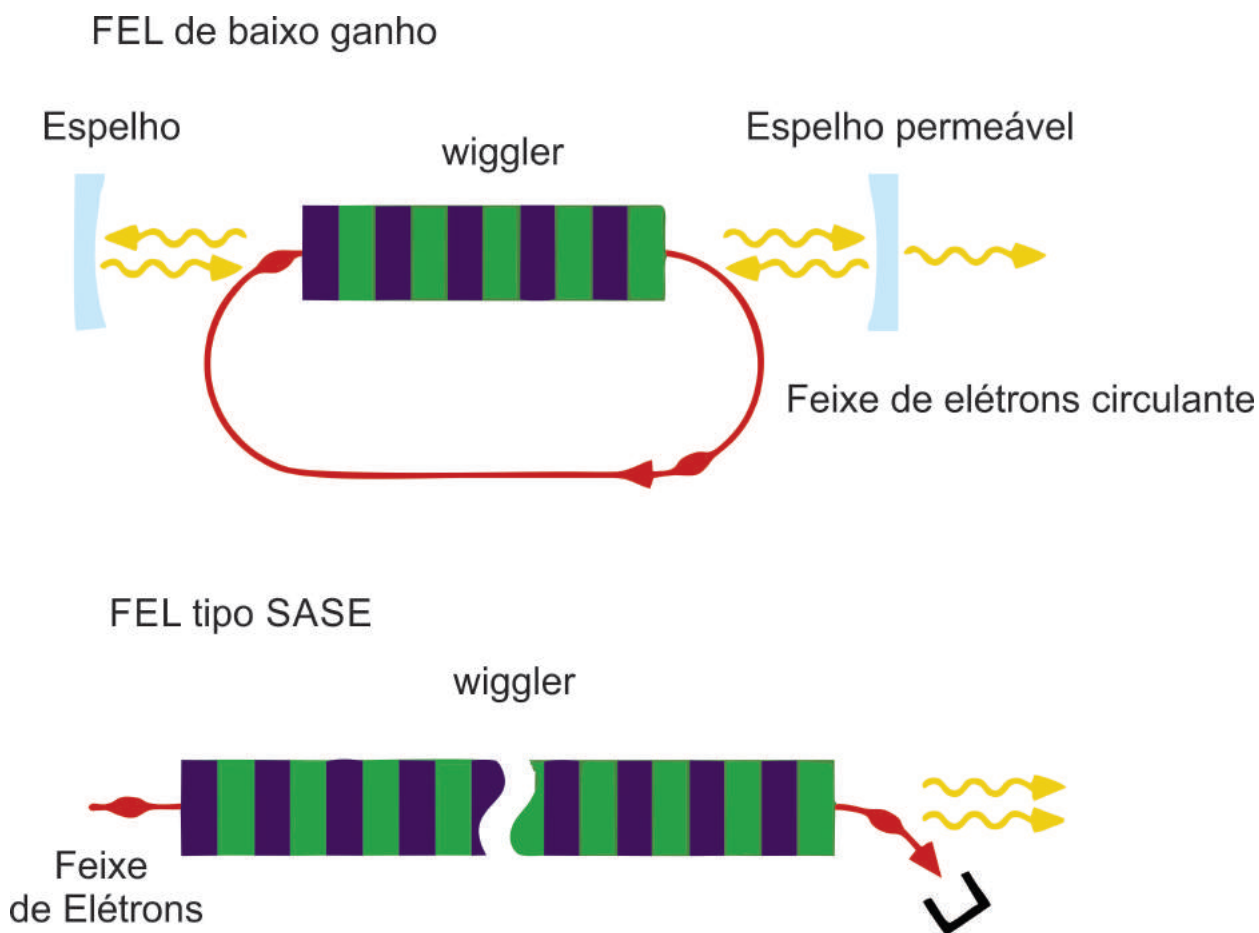


Figura 2.5: Esquema de dos tipos de regime que podem funcionar em um FEL clássico

de baixo ganho mostra suas limitações quando desejamos construir FELs operando em comprimentos de onda muito curtos (abaixo de 100nm). Uma solução para esse limite é o chamado *Single-Pass High-Gain Free-Electron Laser*, em que a saturação é atingida em uma única passagem do feixe por um longo *wiggler*.

2.2 Regime de alto ganho

No regime de alto ganho, a aproximação de a energia do feixe de elétrons e a amplitude da radiação estimulada (numa única passagem através do *wiggler*) serão quase constantes, não é mais válida. As equações para a fase θ e para a energia, γ , do feixe têm que se acoplar com as equações para o campo de radiação, a_s , de modo auto consistente. Este mecanismo leva a alguns resultados importantes. O mais notável é que neste regime, o campo eletromagnético da radiação cresce exponencialmente durante uma passagem pelo *wiggler* até atingir um grande valor de saturação. Porém, se o *wiggler* é suficientemente longo e a corrente do feixe de elétrons é suficientemente alta, a modulação da energia se converte em uma modulação espacial, ou seja, uma modulação da fase. Dessa forma, os elétrons agrupam-se (*bunching*), numa escala do comprimento de onda da radiação emitida, mas, este *bunching* se manifesta na vizinhança da frequência que corresponde ao ganho e, assim, os elétrons carregam quase a mesma fase, emitindo coletivamente e de forma coerente. De fato, o Regime de Baixo Ganho pode ser considerado como o limite do Regime de Alto Ganho, quando o comprimento do *wiggler* é muito menor que o chamado comprimento do ganho[7], L_g , cuja expressão é dada por

$$L_g = \left(\frac{\gamma^3 \lambda_w m_e c^2}{4\pi^2 a_w^2 e^2 n_b} \right)^{1/3}, \quad (2.29)$$

sendo n_b a densidade de repouso do feixe de elétrons. Esta grandeza é definida como a distância que a amplitude da onda eletromagnética estimulada (radiação emitida), a_s , leva para crescer em um fator $e=2.718$. Portanto, a saturação para o campo de radiação e as dimensões do ondulator são determinadas por esta grandeza.

Na produção de radiação com um alto brilho e com comprimento de onda mais curto existem alguns fatos importantes a considerar. Por exemplo, para a produção de raios-X e raios- γ , devemos dispor ou de um feixe de elétrons ultra energético ou de um *wiggler* de período muito reduzido. Ao fixar um *wiggler* convencional de período $\lambda_w \sim 1.0\text{cm}$ e

de intensidade $a_w \sim 1$, se quisermos produzir uma radiação de comprimento de onda de $10^{-8}cm$, precisamos dispôr de um feixe de elétrons com $\gamma = 10.000 \sim 5GeV$, o que só pode ser produzido com aceleradores com dimensões de quilômetros. Isto, além do fato de que o comprimento de ganho ser proporcional à energia feixe, exige *wigglers* extensos para se atingir a saturação da radiação. Um outro parâmetro importante para caracterizar o desempenho do FEL é o chamado Comprimento de Cooperação (Cooperation Length), que tem a seguinte expressão [?]:

$$L_c = \lambda_s / \lambda_u L g. \quad (2.30)$$

Para pequenos comprimentos de onda, um *bunching* possui muitos comprimentos de

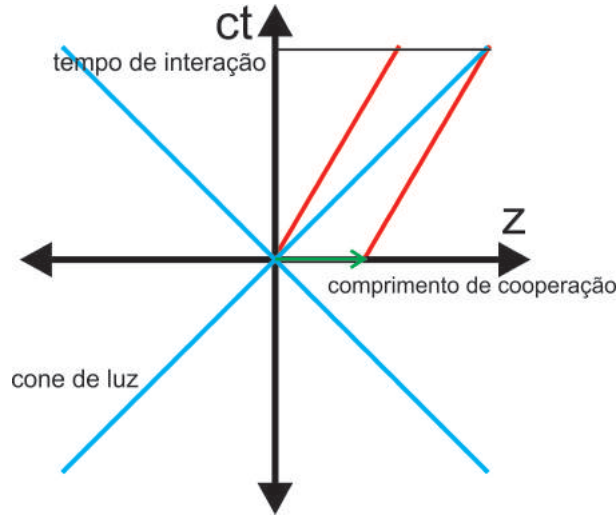


Figura 2.6: Comprimento de cooperação: *slippage* em um comprimento de ganho, a radiação se propaga mais rápido que os elétrons, que se comunicam com os que se encontram a uma distancia menor que o *slippage* total $S = N_w \lambda_w$

cooperação e as interações entre diferentes partes deste acontecem devido a que, para cada período do *wiggler*, percorrido pelo elétron, ele é atrasado um comprimento λ_s em relação à radiação. Dessa forma, os elétrons, que estão dentro de um comprimento de onda, interagem mais com os elétrons que estão na parte frontal do *bunching*. Esta interação é

limitada para os elétrons que se encontram dentro do *bunching*, não mais longe que uma distância $L_s = N_w \lambda_s$, conhecida como *slippage*.

Os termos comprimento de cooperação, assim como *slippage* têm sido introduzidos na teoria de FELs para nomear a distância, dentro do *bunching*, em que se tem uma forte interação entre os elétrons. Podemos dizer que o comprimento de cooperação é igual à distância que os elétrons se atrasam depois de percorrer um comprimento de ganho. O mecanismo de um FEL é assim determinado, localmente, dentro de um comprimento de *slippage* no *bunching*, que tem um comprimento da mesma ordem que o de cooperação. Para pequenos comprimentos de onda, o *bunching* possui dimensão de vários comprimentos de cooperação. Consequentemente, os elétrons que se encontram fora do alcance do comprimento de cooperação emitem independentemente dos demais, o que leva a um FEL tipo SASE (*Self Amplification Stimulated Emission*) apresentar um espectro temporal caótico e com picos de radiação [27], prejudicando a sua coerência.

A solução para este tipo de desvantagem poderia estar no uso de *wigglers* ópticos, Fig. [2.7]. O *wiggler* óptico é um laser interagindo com um feixe de elétrons vindo na direção contrária à direção de propagação do feixe. Esta técnica faz com que o comprimento de onda associado ao campo eletromagnético da radiação seja bem menor que o período de um *wiggler* magnetostático, chegando a poucas centenas de nanômetros. Assim, se precisaria de feixes menos energéticos para a produção de comprimentos de onda curtos. De acordo com a condição de ressonância, para *wigglers* ópticos tem-se um fator de 4, no denominador, ao invés de 2, fazendo com que o comprimento de onda radiação emitida pelo FEL diminua mais ainda. Porém, com *wigglers* ópticos e feixes de baixas energia, o FEL entra em um novo regime quântico, dado que as condições neste regime leva a que o *recoil*, devido à emissão de fóton energético, seja relevante, o que podemos descrever em termos quantitativos como: $\hbar k_s / m_e \gamma_e c \geq 1$. Deste modo, a transição do regime clássico para o quântico acontece quando não podemos mais desprezar o *recoil* devido a emissão

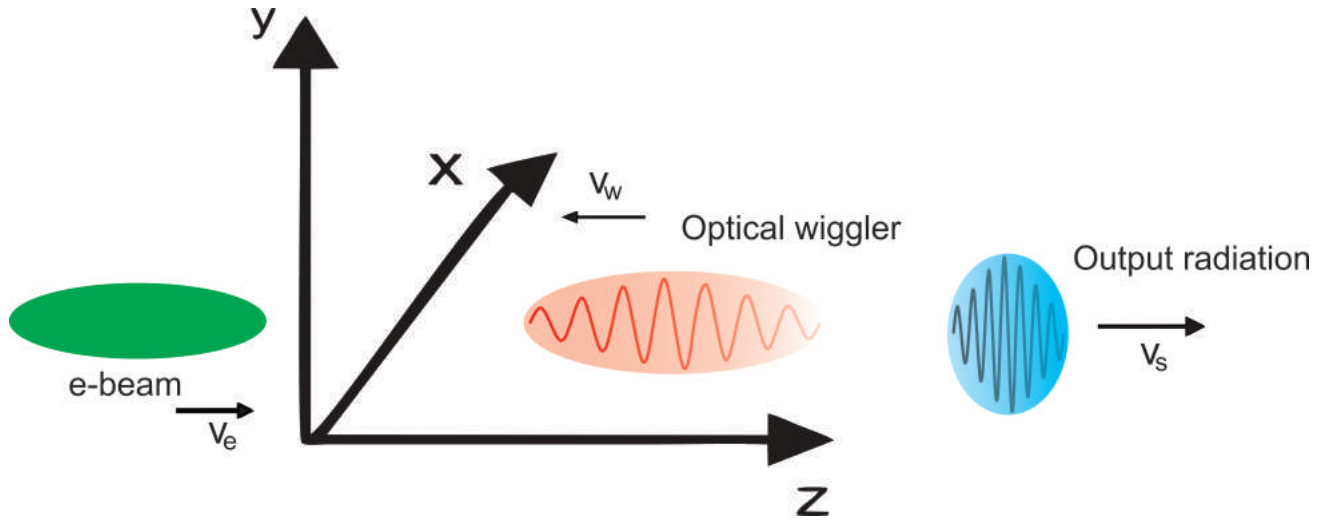


Figura 2.7: Esquema do mecanismo de um FEL com *wiggler* ótico

de um fóton com um *momentum* muito alto.

2.3 O modelo Quântico

Desde que Motz [9] em 1953 reportou a obtenção da radiação coerente usando um feixe de elétrons relativísticos, com energia 3 a 5 MeV, através de um campo magnético transversal, periódico e estático, muitos outros trabalhos foram desenvolvidos para obter radiação coerente a partir de um feixe de elétrons. Mas foi Madey [1] que, em 1971, introduziu o conceito de Free Electron Laser e, dentro do formalismo da Mecânica Quântica, calculou o ganho da emissão de um FEL, usando a aproximação de Wiegacker-Williams, [10][11], mostrando que o ganho não depende da constante de Planck e que a emissão de um FEL é um efeito basicamente clássico. Depois, em 1977, Colson [12] desenvolveu uma teoria clássica para um FEL, no regime de baixo ganho. A física básica nesta descrição é o intercâmbio de energia entre o feixe e a onda eletromagnética plana que resulta da emissão.

Calculou assim o ganho da emissão e mostrou que coincidia com o resultado de Madey. Em 1978, Gover e Yariv [15] apresentaram um modelo para FELs nos regimes quântico e clássico, dentro de uma aproximação unidimensional para descrever a interação de um feixe de elétrons com estruturas eletromagnéticas periódicas, mostrando a possibilidade e as condições de operação para a alta eficiência que se poderia obter dos FELs. No entanto, a necessidade de uma teoria quântica para FELs (*Quantum FELs*) e as limitações da teoria clássica foram muito estudadas no começo dos anos 80s [13] [14] [16] [18], quase todos chegando à conclusão de que o FEL é um efeito basicamente clássico numa boa aproximação, se o recuo devido a emissão do fóton é pequeno. Foi Guliano Preparata [24], por sua vez, quem apresentou um modelo baseado na teoria quântica de campos e mostrou o crescimento exponencial da radiação baseado numa aproximação de equação de Schrödinger para uma partícula. Por outro lado, Honglie Fang et. al. descreveram um FEL usando um modelo semi-clássico, onde o feixe de elétrons é descrito por uma função de onda descrita por uma equação Klein-Gordon, acoplado a um termo de corrente correspondente à radiação, sendo esta radiação descrita pelo electromagnetismo clássico.

Outro trabalho importante é o de Smetanin [23], que partindo da equação de Klein-Gordon, mostrou que um FEL torna-se um oscilador quântico de dois níveis. Bonifacio e Casagrande [19] desenvolveram uma teoria de alto ganho na aproximação unidimensional para um SASE-FEL e forneceram um quadro muito útil do processo FEL, descrevendo toda a física FEL, incluindo o início de um sinal externo (*seed*) ou de um ruído espontâneo de radiação, comprimento de ganho exponencial, potência de saturação com uma quantidade única, o parâmetro FEL, ρ . Este parâmetro é uma função da densidade do feixe, da energia, do período de ondulator e da intensidade de campo magnético. Além de esclarecer alguns dos fatos fundamentais da física do sistema, o modelo por eles desenvolvido permite avaliar e analisar as características de um FEL de modo simples. É assim que eles defenderam que o desenvolvimento de modelos quânticos seria importante, uma vez que as flutuações quânticas são necessárias para inicializar um sistema em condições

de equilíbrio e também por que elas poderiam afetar a dinâmica do sistema e a própria inicialização. Finalmente nesse mesmo trabalho, mostraram que o ganho exponencial depende da emissão espontânea que se origina das flutuações da posição e depende do momento linear no instante da inicialização.

Serbeto et. al. [20] apresentam um modelo quântico para evolução do feixe de elétrons em um campo do *wiggler* usando ondas cinéticas que vêm da evolução para a função de Wigner do sistema, acopladas a um potencial ponderomotivo adequado. Esse modelo leva a uma descrição geral para a instabilidade do FEL, levando em conta o efeito cinético de amortecimento de Landau (*Landau damping*).

Nesta tese apresentaremos um enfoque sobre o modelo hidrodinâmico quântico, onde as variáveis serão obtidas por meio de uma transformação de Madelung para a função de onda associada aos elétrons do feixe, cuja evolução vem de uma equação tipo Schrödinger, obtida do princípio da conservação da energia relativista total.

O modelo hidrodinâmico tem seu ponto forte na simplicidade de implementação numérica, visto que não vamos precisar resolver um sistema de equações onde se contemplem as variáveis para cada partícula no modelo hidrodinâmico. As variáveis vão corresponder a flutuações contínuas de densidade e velocidade. O uso de modelos hidrodinâmicos se reforça pelo fato que, nos modelos usuais, para simular a dinâmica dos FELs utiliza-se uma distribuição de um número macro elétrons dentro do poço potencial ponderomotivo, que não é mais possível fazer quando os comprimentos de onda da emissão são ultra-curtos, relevantes em *Quantum FELs*. Isto leva a que se torne impossível colocar mais de um elétron dentro de um poço potencial, quando no máximo conseguimos colocar dentro deste poço, um elétron. Se nós quisermos inserir um elétron por comprimento de onda na faixa dos raios X ($\sim 10^{-9}$), a densidade correspondente teria que ser maior que a densidade da matéria sólida.

Capítulo 3

Modelo Hidrodinâmico Quântico para Free-electron Lasers

Na interpretação de Kopenhagen, $\psi\psi^*$ é conhecida por descrever a distribuição de probabilidade de uma partícula quântica cuja função de onda associada é governada pela equação de Schrödinger. Dessa forma, Erwin Madelung em 1926 [35], tentando entender a natureza desta equação para o caso de N-partículas, propôs uma mudança de variável sobre esta função de onda, de modo que a distribuição de probabilidade associada seja igual à densidade de partículas. Assim, a equação de Schrödinger, que é uma equação complexa, é convertida em duas equações dinâmicas reais não lineares e que se identificam com equações de Euler da hidrodinâmica. A primeira destas equações corresponde à equação de continuidade de um fluido e a segunda à equação do movimento para este fluido, que contem um termo de potencial quântico que surge naturalmente através da transformação e normalização da amplitude da função de onda macroscópica, termo que irá mostrar efeitos tais como a difração quântica, dispersão não linear e tunelamento. Recentemente, os modelos quânticos hidrodinâmicos têm ganhado importância nas pesquisas

que envolvem processos de interação de plasmas densos com ondas eletromagnéticas, [33], [36], [38] onde os efeitos como difração quântica, dispersão não linear e tunelamento são levados em consideração.

Este capítulo é dedicado ao estudo da dinâmica de um feixe de elétrons relativístico desde a descrição hidrodinâmica. O feixe é monoenergético e interage com um potencial ponderomotivo gerado pelo o batimento de duas ondas eletromagnéticas intensas. Para isso, vamos deduzir uma equação Schrödinger que descreve a dinâmica da função de onda macroscópica associada ao feixe de elétrons. Serbeto *et. al.* [20] mostraram que, partindo da expressão da energia total para um feixe de elétrons relativístico, sujeito a um potencial ponderomotivo, pode-se encontrar uma equação de onda, que descreve a evolução da função de onda macroscópica associada ao feixe e levando em conta as devidas correções relativísticas, similar à equação de Schrödinger.

A expressão para a energia total de um elétron do feixe relativístico que se movimenta com velocidade v_e com as características mencionadas acima é

$$E = \sqrt{\vec{p}_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + V(r, t) - e\phi(r, t), \quad (3.1)$$

onde podemos reconhecer que o termo que contém raiz quadrada é a energia de um elétron relativístico livre, $V(r, t)$ é o potencial ponderomotivo e ϕ é o potencial escalar devido às oscilações das cargas espaciais. Quando estes elétrons estão livres, isto é, $V = \phi = 0$, desde o ponto de vista de De Broglie, temos que a energia relativística total, $E = \hbar\omega_e$, e o momento linear $\vec{p}_e = \hbar\vec{k}_e$, dos elétrons, permanecem constantes. Aqui, $\vec{k}_e$ é o vetor de onda e m_e é a massa de repouso dos elétrons. Com isto, podemos supor que sob ação de um potencial, estas quantidades podem variar lentamente no espaço e no tempo. Seguindo a referência [16] e usando o método de Whitham-Karman-Kruskal [17] que é equivalente ao método da quantização da ótica geométrica, introduzimos as seguintes substituições:

$$E \rightarrow \hbar(\omega_e + i\frac{\partial}{\partial t}), \quad \vec{p}_e \rightarrow \hbar^2(\vec{k}_e - i\nabla); \quad (3.2)$$

que são válidas na aproximação Eikonal e equivalentes à aproximação de envelope lentamente variável. Considerando esta aproximação para o caso do momento, tem-se

$$\vec{p}_e^2 = \hbar^2(\vec{k}_e - i\nabla)^2 = \hbar^2(\vec{k}_e^2 - 2i\vec{k}_e \cdot \vec{\nabla} + \nabla^2); \quad (3.3)$$

substituindo na Eq. [3.3] para energia, obtêm-se

$$E = (\hbar^2(\vec{k}_e^2 - 2i\vec{k}_e \cdot \vec{\nabla} + \nabla^2)c^2 + m_e^2c^4)^{1/2} + V(r, t) - e\phi(r, t). \quad (3.4)$$

Definindo $\Gamma_e = [\hbar^2(\vec{k}_e^2 - 2i\vec{k}_e \cdot \vec{\nabla} + \nabla^2) + m_e^2c^2]^{1/2}$ e desenvolvendo, temos

$$\Gamma_e = \hbar k_e [1 + \frac{m_e^2c^2}{\hbar^2k_e^2}]^{1/2} - \frac{i\hbar}{k_e[1 + \frac{m_e^2c^2}{\hbar^2k_e^2}]^{1/2}} \vec{k}_e \cdot \vec{\nabla} + \frac{\hbar}{2k_e[1 + \frac{m_e^2c^2}{\hbar^2k_e^2}]^{1/2}} [\nabla^2 + (1 - \frac{m_e^2c^2}{k_e^2\hbar^2})(\hat{e}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla})^2], \quad (3.5)$$

ou melhor (Apêndice 1),

$$\Gamma_e = \frac{\hbar}{c} \Omega_e^{1/2} + \frac{c\hbar}{2\Omega_e^{1/2}} [-2i\vec{k}_e \cdot \nabla + \nabla^2 + (1 - \frac{m_e^2c^2}{k_e^2\hbar^2})(\hat{e}_{\parallel} \cdot \nabla)^2], \quad (3.6)$$

onde

$$\Omega_e = c^2k_e^2(1 + \frac{m_e^2c^2}{\hbar^2k_e^2}); \quad \hat{e}_{\parallel} = \vec{k}_e/k_e. \quad (3.7)$$

Introduzindo este resultado na expressão para a energia e levando em conta a condição (3.2) temos

$$i\hbar(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla})\psi + \frac{c^2\hbar}{2\omega_e} [\nabla^2 - (1 - \frac{m_e^2c^4}{\hbar^2\omega_e^2})(\hat{e}_{\parallel} \cdot \nabla)^2]\psi = (V(\vec{r}, t) - e\phi(\vec{r}, t))\psi, \quad (3.8)$$

onde,

$$\vec{v}_e = c \frac{\vec{k}_e}{k_e} (1 + \frac{m_e^2c^2}{\hbar^2k_e^2})^{-1/2} = c(1 + \frac{\lambda_e^2}{\lambda_c^2})^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

no caso em que o comprimento de Compton do elétron $\lambda_c = h/m_e c \ll \lambda_e = 2\pi/k_e$, $\vec{v}_e \approx (\hbar k_e/m_e)\hat{e}_{\parallel}$ e $\vec{v}_e \approx c\hat{e}_{\parallel}$, para $\lambda_c \gg \lambda_e$.

Consideramos agora que o sistema seja composto por N elétrons e descrito por um conjunto de partículas representado por uma função de onda macroscópica, $\psi(\vec{r}, t)$, normalizada de modo que a densidade das partículas seja $n(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$. Esta normalização é válida sempre que se leva em consideração que o conjunto de partículas interage coletivamente através do potencial ponderomotivo, ou equivalentemente, que os elétrons se encontram em um único estado perfeitamente coerente. Notemos que a Eq. [3.8] obtida é a equação que descreve a evolução da função de onda associada ao conjunto de partículas do feixe relativístico. Esta equação pode ser simplificada ao fazermos uma transformação das variáveis do laboratório, $(\vec{r}; t)$, para o espaço, $(\vec{\xi}; t')$, tal que

$$\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{v}_e t; \quad t' = t, \quad (3.10)$$

onde, $\vec{v}_e$ é a velocidade do feixe de elétrons. Assim, os correspondentes operadores transformam-se do seguinte modo:

$$\nabla = \nabla_{\xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}_e \cdot \nabla_{\xi}. \quad (3.11)$$

O que se procura com esta transformação é buscar soluções que sejam funções da variável $\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{v}_e t$. Assim, por simplicidade, vamos nos referir às quantidades físicas, que são funções das variáveis $\vec{\xi}$ e t , como as variáveis no referencial do feixe. Para uma melhor descrição do nosso sistema, vamos decompor o operador ∇_{ξ} de modo que

$$\vec{\nabla}_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi_{\parallel}} \hat{e}_{\parallel} + \frac{\partial}{\partial \xi_{\perp}}, \quad (3.12)$$

onde $\vec{\xi} = \xi_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + \xi_{\perp}$ e $\hat{e}_{\parallel}$ indica o sentido de propagação paralelo ao feixe de elétrons e a outra parte indica o sentido perpendicular. Substituindo estas transformações na Eq.(3.8), temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \psi + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \left(\frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial^2}{\xi_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2}{\xi_{\perp}^2} \right) \psi = (V - e\phi) \psi, \quad (3.13)$$

onde, $\hbar\omega_e = \gamma_e m_e c^2$ e $\gamma_e = 1/\sqrt{1 - v_e^2/c^2} \gg 1$ é o fator relativístico associado ao feixe de elétrons. Esta equação é exatamente idêntica à equação de Schrödinger obtida por Preparata [24], através da Teoria Quântica dos Campos, desprezando-se os efeitos transversais e na ausência das oscilações das cargas espaciais, na dinâmica do feixe de elétrons durante a sua interação com os campos eletromagnéticos envolvidos no processo.

O potencial ϕ devido à oscilação das carga espaciais é dado pela seguinte equação de Poisson:

$$-\nabla_{\xi} \cdot \vec{E} = -\nabla_{\xi} \cdot \vec{E}_{\perp} - \nabla_{\xi} \cdot \vec{E}_{\parallel} = -\nabla_{\xi} \cdot \vec{E}_{\perp} + \nabla_{\xi}^2 \phi = 4\pi |\psi|^2, \quad (3.14)$$

onde $\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$ é o campo elétrico total associado à oscilação de cargas.

3.1 Transformada de Madelung e as Equações da Hidrodinâmica

O modelo Hidrodinâmico Quântico, proposto e estudado por Madelung [35] e também por Bohm[39] e Wilhem [40] é conhecido por descrever a distribuição de probabilidade de um sistema de partículas por meio da seguinte representação para a função de onda macroscópica, ψ ,

$$\psi(\vec{\xi}, t') = A(\vec{\xi}, t') e^{iS(\vec{\xi}, t')/\hbar} \quad (3.15)$$

onde S é a ação do sistema e $A > 0$ é uma grandeza que varia lentamente. Substituindo na Eq. [3.13], temos

$$\begin{aligned} & i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial t'}A + \frac{i}{\hbar}A\frac{\partial}{\partial t'}S\right\} + \frac{\hbar^2}{2m_e\gamma_e^3}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\parallel}^2}A + \frac{i}{\hbar}A\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\parallel}^2}S + \frac{2i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}S\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}A - \frac{A}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2\right\} \\ & + \frac{\hbar^2}{2m_e\gamma_e}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\perp}^2}A + \frac{i}{\hbar}A\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\perp}^2}S + \frac{2i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}S\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}A - \frac{A}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\xi_{\perp}}\right)^2\right\} = (V - e\phi)A. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Separando em partes real e imaginária vamos obter duas equações reais. A que corresponde a parte imaginária tem a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t'}A + \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{m_e\gamma_e^3}\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\parallel}^2}S + \frac{2}{m_e\gamma_e^3}\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}S\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}A\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{A}{m_e\gamma_e}\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\perp}^2}S + \frac{2}{m_e\gamma_e}\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}S\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}A\right\} = 0, \quad (3.17)$$

multiplicando esta expressão por A , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t'}A^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}\frac{A^2}{m_e^2\gamma_e^3}\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}S\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}\frac{A^2}{m_e\gamma_e}\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}S\right\} = 0. \quad (3.18)$$

Para a parte real, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'}S + \frac{1}{2m_e\gamma_e^3}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}S\right)^2 + \frac{1}{2m_e\gamma_e}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}S\right)^2 = \\ & -(V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e\gamma_e^3}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\parallel}^2}A\right) + \frac{\hbar^2}{2m_e\gamma_e}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\perp}^2}A\right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Notemos que no limite clássico, $\hbar \rightarrow 0$, esta equação se reduz à equação de Hamilton-Jacobi. Aplicando o operador ∇_{ξ} neste resultado, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t'}\nabla_{\xi}S + \frac{1}{2m_e\gamma_e^3}\nabla_{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{\parallel}}S\right)^2 + \frac{1}{2m_e\gamma_e}\nabla_{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{\perp}}S\right)^2$$

$$= -\nabla(V - e\phi) + \frac{\hbar}{2m_e\gamma_e^3}\nabla_\xi\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\xi_\parallel^2}A\right)^2 + \frac{\hbar}{2m_e\gamma_e}\nabla_\xi\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\xi_\perp^2}A\right)^2, \quad (3.20)$$

onde as funções $A(\vec{\xi}, t')$ e $S(\vec{\xi}, t')$ estão associadas à densidade de partículas do feixe, $n(\vec{\xi}, t')$ e a sua velocidade, $\vec{v} = v_\parallel\hat{e}_\parallel + \vec{v}_\perp$, a saber

$$A^2 = |\psi|^2 = n \quad (3.21)$$

$$v_\parallel = \frac{1}{m_e\gamma_e^3}\frac{\partial}{\partial\xi_\parallel}S = \frac{p_\parallel}{m_e\gamma_e^3} \quad (3.22)$$

$$v_\perp = \frac{1}{m_e\gamma_e}\frac{\partial}{\partial\xi_\perp}S = \frac{p_\perp}{m_e\gamma_e} \quad (3.23)$$

Introduzindo essas expressões na Eq. [3.20], correspondente à parte imaginária da equação de Schrödinger (3.15), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t'}n + \nabla_\xi(n\vec{v}) = 0, \quad (3.24)$$

onde a velocidade, $\vec{v} = v_\parallel\hat{e}_\parallel + \vec{v}_\perp$, foi decomposta em componentes paralela e perpendicular ao vetor de onda de De Broglie para o elétron livre, $\vec{k}_e = \vec{p}_e/\hbar$. Substituindo estas definições na Eq. [3.20], obtém-se para parte real que

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial t'} + \frac{1}{2}\nabla_\xi(\vec{v}\cdot\vec{p}) = -\nabla_\xi(V - e\phi) + \frac{\hbar}{2m_e\gamma_e}\nabla_\xi\left[\frac{1}{\sqrt{n}}D_\xi^2\sqrt{n}\right], \quad (3.25)$$

que é a equação de Euler para o transporte de momento de um fluido com correção relativística, onde

$$\vec{p} = \nabla_\xi S \quad D_\xi^2 = \left(\frac{1}{\gamma_e^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_\parallel^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_\perp^2}\right). \quad (3.26)$$

Podemos notar que o último termo desta equação corresponde ao potencial quântico (potencial de Bohm) que contém toda informação quântica sobre o sistema. Este potencial, que é usado para descrever um plasma quântico no modelo de fluido [37], aparece também na equação do movimento para um fluido supercondutor [41]. Reparemos que este potencial tornar-se importante sobre os outros termos da equação quando se tem gradientes muitos altos na densidade de partículas.

As equações de continuidade [3.24] e do movimento [3.25] formam um conjunto de equações que descrevem a dinâmica de um elemento de fluido com densidade $n(\xi, t')$, velocidade $\vec{v}(\vec{\xi}, t')$ e momento linear $\vec{p}(\vec{\xi}, t')$, sujeito à ação dos campos eletromagnéticos dados através dos potenciais ponderomotivo, V , e ao associado as oscilações das cargas espaciais, ϕ .

Devemos observar, agora, que a distribuição de probabilidade não corresponde às descritas por partículas individuais e sim por um conjunto delas, cuja velocidade, $\vec{v}(\vec{\xi}, t')$, e momento linear, $\vec{p}(\vec{\xi}, t')$, estão associados ao fluido relativístico. A componente longitudinal, $v_{\parallel}$, da velocidade do fluido será vista como uma pequena diferença entre a velocidade no feixe e a velocidade ressonante no referencial do laboratório. A componente perpendicular, $v_{\perp}$, da velocidade corresponde à velocidade de difusão térmica transversal e com o momento linear $p_{\perp}$. Esta velocidade domina os efeitos quânticos na direção transversal. Neste trabalho considerar-se-á a aproximação unidimensional em que todos os efeitos transversais devido a interação do feixe relativísticos com os campos eletromagnéticos desprezáveis, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{\perp}} = 0, \quad (3.27)$$

$$\vec{A}(\vec{\xi}, t') \rightarrow \vec{A}(\xi_{\parallel}, t'), \quad (3.28)$$

$$\vec{S}(\vec{\xi}, t') \rightarrow \vec{S}(\xi_{\parallel}, t'), \quad (3.29)$$

Assim, as equações de fluido complementadas com a equação de Poisson para o potencial

eletrostático, ϕ , se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial t'} n + \frac{\partial}{\partial \xi} (nv) = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} p + v \frac{\partial}{\partial \xi} p = \frac{1}{m_e \gamma_e} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{n} \right] \right\}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 4\pi e n_b \left(\frac{n}{n_b} - 1 \right), \quad (3.32)$$

onde n_b é a densidade de equilíbrio do feixe de elétrons relativístico. Estas equações nos dão o marco teórico para a descrição dinâmica relativística de um feixe de elétrons, interagindo com um campo eletromagnético através de um potencial poderomotivo, V , acrescido do potencial eletrostático, ϕ . Essas equações devem ser completadas com as equações de onda, que descrevem a dinâmica da radiação eletromagnética geradas por eles mesmos.

Capítulo 4

Dinâmica do campo de radiação

Nesta parte focaremos na radiação emitida pelo feixe de elétrons como resultado da interação com o *wiggler* óptico, que será abordada através da teoria eletromagnética clássica, cuja correspondente equação de onda tem como fonte a corrente elétrica transversal gerada pela interação do feixe de elétrons com os modos eletromagnéticos transversais envolvidos no processo.

Quando consideramos que a radiação espalhada, devido à interação do *wiggler* óptico com os elétrons, propaga-se na mesma direção que o feixe, isto é, direção positiva $\hat{z}$, podemos descrever o campo da radiação pelo seu potencial vetor associado dado por

$$\vec{A}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{e}A_s(z)\exp(ik_s z - i\omega_s t)] + c.c., \quad (4.1)$$

onde $\hat{e} = \hat{x} + i\hat{y}$ é o vetor unitário de polarização, enquanto k_s e ω_s são, respectivamente, o vetor de onda e a frequência angular da radiação de amplitude $A_s(z)$. O potencial vetor correspondente ao campo eletromagnético do *wiggler* óptico, que se propaga no sentido

oposto ao feixe é dado por

$$\vec{A}_w = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{e}A_w \exp(-ik_w z - i\omega_w t)] + c.c., \quad (4.2)$$

onde k_w e ω_w são o vetor de onda e a frequência angular do *wiggler*, e onde, A_w é a sua amplitude considerada constante no espaço e no tempo. Para fins de cálculo numérico, essas podemos reescrever essas expressões de forma adimensional, introduzindo as grandezas, $a_s = eA_s/m_e c^2$ e $a_w = eA_w/m_e c^2$. Assim, temos

$$\vec{a}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{e}a_s(z)e^{i\theta_s}] + c.c., \quad (4.3)$$

$$\vec{a}_w = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{e}a_w e^{i\theta_w}] + c.c., \quad (4.4)$$

onde $\theta_s = k_s z - \omega_s t$ e $\theta_w = -k_w z - \omega_w t$. A radiação emitida obedece a seguinte equação de onda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{a}_s = -\frac{e4\pi}{mc^3} \vec{J}_\perp, \quad (4.5)$$

onde a corrente transversal é dada por

$$\vec{J}_\perp = -en\vec{v}_\perp, \quad (4.6)$$

sendo $\vec{v}_\perp$ a velocidade transversal dos elétrons e n o número de emissores. A velocidade transversal é obtida da relação de conservação do momentum linear transversal para um elétron relativístico que se move na mesma direção que o campo eletromagnético [44]. Assim temos

$$\vec{v}_\perp = \frac{c}{\gamma}(\vec{a}_t), \quad (4.7)$$

onde γ é o fator relativístico e $\vec{a}_t = \vec{a}_s + \vec{a}_w$ é o campo eletromagnético total que resulta da ação combinada dos campos da radiação e do *wiggler* sobre o elétron.

Substituindo a expressão [4.3] na Eq. [4.5] e levando em conta as Eqs. [4.3], [4.6] e [4.7], para depois multiplicar ambos lados da equação [4.1] pelo vetor unitário $\hat{e}$, obtemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) a_s = \frac{\omega_p^2}{\gamma c^2} \left(\frac{n}{n_b}\right) (a_s + a_w), \quad (4.8)$$

onde $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_b / m_e$ é o quadrado da frequência de plasma associada ao feixe e n_b é a densidade média de elétrons do feixe.

Levando em conta que a amplitude da radiação a_s varia lentamente no espaço e no tempo (SVEA), temos

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} a_s \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (2ik_s \frac{\partial a_s}{\partial t} - \omega_s^2 a_s) e^{i\theta_s}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a_s \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (2ik_s \frac{\partial a_s}{\partial z} - k_s^2 a_s) e^{i\theta_s}; \quad (4.10)$$

Substituindo estas aproximações na equação de onda [4.6], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} [2ik_s \frac{\partial a_s}{\partial z} - k_s^2 a_s] - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{2}} [-2i\omega_s \frac{\partial a_s}{\partial t} - \omega_s^2 a_s] = \\ \frac{\omega_p^2}{\gamma c^2} \left(\frac{n}{n_b}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} a_s e^{i\theta_s} + \frac{1}{\sqrt{2}} a_w e^{i\theta_w} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$2ik_s c^2 \frac{\partial a_s}{\partial z} + (\omega^2 - k_s^2 c^2 - \frac{\omega^2 N}{\gamma}) a_s + 2i\omega_s \frac{\partial a_s}{\partial t} = \frac{\omega_p}{\gamma} N a_w e^{i\theta}, \quad (4.12)$$

onde $N = n/n_b$ corresponde à densidade local normalizada do feixe de elétrons. Assim, a Eq. [4.12] corresponde à equação de evolução da radiação espalhada pelo feixe de elétrons. Notamos claramente nesta equação o acoplamento entre a densidade local do feixe N e o campo do *wiggler* óptico a_w .

Usando a relação de dispersão para uma onda E.M. se propagando em um plasma relativístico, isto é,

$$\omega^2 = k_s^2 c^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma}, \quad (4.13)$$

a equação de evolução da radiação para o modo espalhado obtemos a seguinte forma:

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial a_s}{\partial z} - i \frac{\omega_p^2}{2\gamma_s \omega_s} [1 - N] a_s = \frac{\omega_p^2}{2i\gamma \omega_s} N a_w e^{i\theta}, \quad (4.14)$$

onde $v_s = c^2 k_s / \omega_s$ é a velocidade de grupo da onda emitida. Assim também podemos definir:

$$\theta = \theta_s + \theta_w = (k_w + k_s)z + (\omega_s - \omega_w)t \quad (4.15)$$

como a correspondente fase da onda ponderomotiva, sendo $k_l = k_s + k_w$ o número de onda e $\omega_l = \omega_s - \omega_w$ a sua frequência angular. Essas duas últimas relações referidas à fase ponderomotiva expressam o simples processo de conservação do momento linear e da energia, respectivamente, que ocorre na interação entre três ondas em um plasma.

Fazendo as seguintes mudanças $\xi = z - v_e t$ e $t = t'$, esta equação de onda podemos reescrevê-la como,

$$\frac{\partial a_s}{\partial t'} + (v_s - v_e) \frac{\partial a_s}{\partial \xi} - i \frac{\omega_p^2}{2\gamma \omega_s} (1 - N) a_s = -i \frac{\omega_p^2}{2\gamma \omega_s} N a_w e^{-i\theta}. \quad (4.16)$$

Essas mudanças de variáveis nos permiti escrever a fase da onda ponderomotiva da seguinte forma,

$$\theta = k_l z - \omega_s t = k_l [z - \frac{\omega_l}{k_l} t]. \quad (4.17)$$

Se levamos em conta que estamos interessados em comprimentos de onda de saída muito curtos, isto é $\omega_s \gg \omega_w$ ou $k_s \gg k_w$, podemos considerar que a velocidade de fase da onda ponderomotiva que chamaremos a partir de agora de velocidade ressonante v_r , pode ser aproximada por,

$$v_l = v_r \approx \frac{\omega_l}{k_l}, \quad (4.18)$$

onde $k_l \approx k_s$ e $\omega_l \approx \omega_s$. Essa velocidade ressonante representa a velocidade de um elétron que se movimenta com a mesma velocidade de fase da onda ponderomotiva.

Se consideramos que existe um pequeno desvio da velocidade do elétron em relação à velocidade ressonante, podemos escrever a seguinte expressão

$$v_e = v_r + \delta, \quad (4.19)$$

onde v_e é a velocidade dos elétrons e δ é o desvio que denominaremos neste trabalho de “*detuning*”. Dessa forma a fase θ da onda ponderomotiva pode ser redefinida como,

$$\theta = k_l [z - (v_e - \delta)t] = k_l [z - v_e t] + k_l \delta t. \quad (4.20)$$

Substituindo este resultado na Eq. [4.15], obtemos

$$\frac{\partial a_s}{\partial t'} - v_e \frac{\partial a_s}{\partial \xi} + v_s \frac{\partial a_s}{\partial \xi} - i \frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_s} (1 - N) a_s = -i \frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_s} N a_w e^{i[k_l \xi + k_e \delta t]}. \quad (4.21)$$

Uma adequada mudança: $a_s \rightarrow a_s e^{-ik_l \delta t}$, permite simplificar a equação da radiação que adquire a seguinte forma mais conveniente,

$$\frac{\partial a_s}{\partial t'} + (v_s - v_e) \frac{\partial a_s}{\partial \xi} - i \left[\frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_s} (1 - N) + k_l \delta \right] a_s = -i \frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_s} N a_w e^{i[k_l \xi]}. \quad (4.22)$$

Esta equação contém a descrição dinâmica do campo de radiação a_s , emitida pelo feixe com densidade local N , na região de interação, com o *wiggler* óptico de intensidade constante a_w .

Capítulo 5

Regime estacionário

Como descrevemos no capítulo 2, para um FEL operando no regime de alto ganho, o agrupamento de elétrons (*bunching*), durante a interação com os campos eletromagnéticos, é fundamental para a amplificação da radiação emitida. Entretanto, na faixa de comprimentos de onda ultracurtos (raios X e γ) este mecanismo de formação de agrupamento no poço de potencial ponderomotivo já não é mais viável ser modelado numericamente como uma macro-partícula em um poço de potencial ponderomotivo [31]. É neste cenário que o processo de retro espalhamento de uma onda eletromagnética (*backscattering*), por um feixe de elétrons relativístico, torna-se melhor para descrever os mecanismos de interação de um FEL.

Neste trabalho, temos descrito o feixe de elétrons como um fluido quântico sujeito à ação de um potencial ponderomotivo e ao potencial de Bohm, que carrega toda a informação quântica do sistema (descrito no capítulo 3). A radiação emitida pelo feixe, como resultado da interação com o *wiggler*, é abordada através da teoria eletromagnética clássica, cuja equação de onda tem como fonte a corrente elétrica transversal gerada pela interação do feixe elétrons com os modos transversais.

Uma boa aproximação para descrever este sistema é estudar o regime estacionário ("*steady state*"), onde a variação temporal das quantidades que descrevem a interação do feixe relativístico com os campos eletromagnéticos é desprezada, isto é, a dinâmica do feixe de elétrons, sob a ação do potencial ponderomotivo, será definida via um conjunto de equações não lineares acopladas independente do tempo que contém toda a informação para a descrição da dinâmica de um FEL, em que os comprimentos de ondas envolvidos no processo são ultracurtos. Dessa forma, fazendo

$$\frac{\partial}{\partial t'} \approx 0, \quad (5.1)$$

as equações que descrevem a dinâmica do fluido quântico relativístico, no estado estacionário, tornam-se

$$v \frac{\partial}{\partial \xi} p = \frac{1}{m_e \gamma_e} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{n} \right] \right\} \quad (5.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \xi} v n = 0. \quad (5.3)$$

Integrando estas equações e tendo em conta que $v(\xi = 0) = 0$, $p(\xi = 0) = 0$ e $n(\xi = 0) = n_b$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{N} - \frac{2m\gamma_e^3}{\hbar^2} [V - e\phi] = \frac{-2m\gamma_e^3}{\hbar^2} V(\xi = 0), \quad (5.4)$$

onde $N = n/n_b$ é a densidade normalizada do feixe de elétrons sendo n_b a sua densidade de equilíbrio. Considerando que o feixe é livre antes da interação com os campos externos, temos que $V(\xi = 0) = \gamma_0 m_e c^2$ e $\phi(\xi = 0) = 0$, onde $\gamma_0 = \gamma(\xi = 0)$ é o valor do fator de Lorentz na entrada da região de interação. Porém, utilizando-se a forma do potencial ponderomotivo normalizado, $V/mc^2 = \gamma$ (Apêndice 2), a equação para o fluido pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{N} + \frac{2m\gamma_e^3}{\hbar^2} [mc^2(\gamma_0 - \gamma) + \phi] \sqrt{N} = 0. \quad (5.5)$$

onde $\gamma = [\gamma_e^2 + (\vec{a}_s + \vec{a}_w) \cdot (\vec{a}_s + \vec{a}_w)^*]^{\frac{1}{2}}$.

Fazendo $\sqrt{N} = P$, para a raiz quadrada da densidade normalizada de elétrons, e redefinindo a variável dinâmica (fase), $\theta \approx k_l \xi$, compatível com as equações que descrevem a radiação, obtemos a equação adimensional para a densidade do feixe

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P + 2\sigma^2 [\gamma_0 - \gamma + \phi] P = 0, \quad (5.6)$$

onde $\sigma = m_e c \gamma_e^{3/2} / \hbar k_l$. Esta equação é idêntica à equação Schrödinger obtida na Ref. [19] para um plasma quântico em repouso.

Para o potencial escalar, ϕ , correspondente às oscilações das cargas espaciais, que foi apresentado na Eq. [3.32], onde levamos em conta que o campo elétrico transversal associado a estas oscilações, temos a seguinte relação:

$$-\nabla_\xi \vec{E}_\parallel = 4\pi n, \quad (5.7)$$

a equação para o campo escalar do plasma pode ser descrita do seguinte modo:

$$4\pi n_b + \nabla^2 \phi = 4\pi n. \quad (5.8)$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi = 4\pi n_b \left(\frac{n}{n_b} - 1 \right), \quad (5.9)$$

que pode ser reescrita, na forma normalizada, como

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi = \Omega_p^2 (N - 1), \quad (5.10)$$

onde $k_{lc} \approx \omega_s$, $\Phi = e\phi/mc^2$ e $\Omega^2 = \omega_p^2/\omega_s^2$. Esta equação carrega toda a informação sobre as oscilações de plasma do *beam* de elétrons que são determinantes para a intensidade da radiação emitida.

Para que a dinâmica do FEL seja resolvida de modo auto consistente, necessitamos da equação de onda dada pela Eq. [4.20], que no estado estacionário é escrita como

$$(\beta_s - \beta_e) \frac{\partial a_s}{\partial \theta} - i[\bar{\delta} + \frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_s k_{lc}}(1 - N)]a_s = -i \frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_s k_{lc}} N a_w e^{-i\theta}, \quad (5.11)$$

onde, $\beta_s = ck_s/\omega_s$ é a velocidade de grupo da onda eletromagnética emitida e $\bar{\delta} = \delta/c$ é o *detuning* normalizado.

Fazendo $a_s = ae^{i\theta}$ podemos reescrever esta equação como

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} - i[1 + 2\gamma_e^2 \bar{\delta} + \Omega_0^2(1 - N)]a = -i\Omega_0^2 N a_w, \quad (5.12)$$

onde $\Omega_0^2 = \gamma_e \omega_p^2/\omega_s^2$, sendo $\beta_s - \beta_e \approx 1/2\gamma_e^2$, para $\gamma \approx \gamma_e$, nos denominadores da equação.

Finalmente, sabendo que a amplitude a é uma quantidade complexa, podemos usar a representação polar, para a amplitude da radiação, de modo que $a \rightarrow a \exp(i\varphi)$; assim obtemos as expressões reais que descrevem a amplitude da onda eletromagnética emitida, a saber

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} = -\Omega_0^2 N a_w \text{Sen}(\varphi), \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1 + 2\gamma_e^2 \bar{\delta} + \Omega_0^2(1 - N) - \Omega_0^2 \frac{a_w N}{a} \cos(\varphi). \quad (5.14)$$

Essas duas últimas equações correspondem à equação para a amplitude de módulo a e para a fase φ da onda emitida. Note que estas equações estão acopladas às equações que descrevem a evolução da densidade, N , do feixe de elétrons relativístico. Assim, com estas equações para o campo eletromagnético completamos o conjunto de necessárias e suficientes para descrever a dinâmica do feixe de elétrons relativístico interagindo coletivamente com um potencial eletromagnético ponderomotivo, γ , e com um potencial escalar, Φ , associado às flutuações das carga espaciais. No próximo capítulo vamos resolver numericamente este sistema de equações acopladas e analisar as suas soluções.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

As soluções das Eqs. [5.5], [5.9], [5.13] e [5.14], que descrevem a dinâmica do FEL na aproximação de um fluido quântico, são obtidas numericamente usando-se o código computacional escrito em Python 2.7, que tem por base o método Runge Kutta de quarta ordem e de passo variável. De modo prático, vamos reescrever o sistema de equações acopladas que descrevem totalmente nosso sistema, a saber:

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} = -\Omega_0^2 a_w P^2 \text{Sen}(\varphi), \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1 + 2\gamma_e^2 \bar{\delta} + \Omega_0^2(1 - P^2) - \Omega_0^2 \frac{a_w P^2}{a} \cos(\varphi), \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P = -2\sigma^2[\gamma_0 - \gamma + \phi]P, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi = \Omega_p^2(P^2 - 1); \quad (6.4)$$

onde $N = P^2$ e $\gamma = [\gamma_e^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a_w^2 + 2a_w a \cos(\varphi)]^{1/2}$. Aqui, $\gamma_0 = [\gamma_e^2 + \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{1}{2}a_w^2 + 2a_w a_0 \cos(\varphi_0)]^{1/2}$ é o valor do potencial ponderomotivo normalizado na entrada da região de interação, isto é, em $\theta = 0$.

O sistema acoplado de equações (6.1) é não linear e as variáveis envolvidas são: a_s , correspondente ao campo da radiação espalhada; a fase própria do campo, φ ; a densidade local do feixe, P ; e o potencial escalar, Φ , devido às oscilações das cargas espaciais do feixe. Como veremos, a solução do sistema é extremamente sensível aos valores iniciais dos parâmetros φ_0 , $\bar{\delta}$, n_b e γ_0 comportamento típico dos sistemas não lineares. Assim para cada conjunto de valores destes parâmetros teremos uma solução do sistema, cada uma destas soluções foram calculadas usando 1000000 passos para segurar a estabilidade da solução. Os parâmetros são modificados continuamente dentro de valores adequados e assim obter um conjunto de soluções do sistema mostrados, posteriormente, nos gráficos. Possivelmente, o parâmetro mais importante que temos é o *detuning*, $\bar{\delta}$, que é fundamental em nossos resultados. Lembremos que o *detuning* é a diferença entre a velocidade do feixe de elétron e a velocidade de fase da onda ponderomotiva.

Neste trabalho vamos considerar um feixe de elétrons relativístico com uma energia $E = 120 MeV$ ($\gamma_e = 60$) e com densidade média de elétrons $n_b = 1.0 \times 10^9 cm^{-3}$, interagindo com um *wiggler* óptico (laser) de comprimento de onda $\lambda_w = 650 nm$ e intensidade $I_w = 2.3 \times 10^{18} W/cm^2$, o que corresponde a um potencial vetor normalizado $a_w = 0.6$, que é compatível com a atual tecnologia disponível. Para se obter uma emissão de radiação coerente estimulada na interação, vamos introduzir uma sinal de entrada (semente) de potencial vetor normalizado $a(\theta = 0) = 1.0 \times 10^{-5}$ se propagando na mesma direção do feixe. A condição de ressonância de um FEL com *wiggler* óptico (que estabelece o comprimento de onda para a radiação de saída) será dada por $\lambda_s \approx \lambda_w / 4\gamma_e^2$. Neste caso, obteremos um comprimento de onda $\lambda_s \approx 4.52 \times 10^{-9} cm$ para a radiação estimulada ao final da interação.

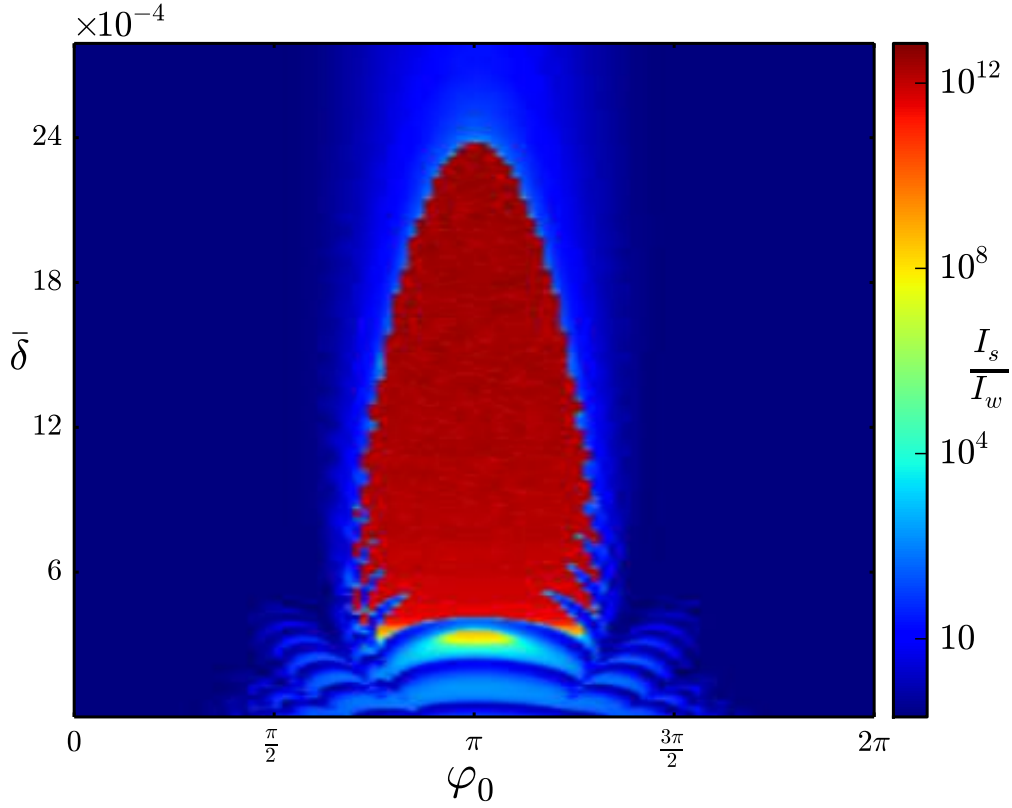


Figura 6.1: Potencia Relativa de Saída para diferentes valores do *detuning* $\bar{\delta}$ e fase inicial da sinal de entrada $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ e $a_w = 0.6, n_b = 1.0 \times 10^9, \gamma_0 = 60$

A figura (6.1) mostra a potência de saída, gerada durante a interação dentro do FEL para diferentes valores do *detuning*, $\bar{\delta}$, e da fase inicial, φ_0 , na entrada da região de interação. Este gráfico mostra como a potência de saída vai depender sensivelmente dos valores destes parâmetros. Podemos observar que o valor de $\varphi_0 = \pi$ e valores de $\bar{\delta}$ na faixa de 2.5×10^{-4} à 20×10^{-4} são os valores ótimos para obter uma máxima emissão. O que demonstra que o *detuning* é fundamental para o processo e que para se obter uma emissão de radiação com uma alta potência devemos estar próximo da ressonância ($v_e = v_r$), mas não nela.

Dados os valores de *detuning* e da fase adequados, o sistema pode atingir o chamado "Limite de Schwinger" (10^{29}W/cm^2), que corresponde a um campo elétrico $E_{QED} = 1.3 \times 10^{16} \text{V/cm}^2$, de acordo com a Teoria Quântica dos Campos, que corresponde à criação de pares (eletron-positron). Essa potência limite atingida em nosso sistema corresponde a zonas do laranja ao vermelho na figura (6.1).

A figura (6.2) mostra a potencia de saída, desta vez para valores de *detuning* e diferentes valores de energia inicial do feixe, mostrando que o processo de radiação, também vai depender sensivelmente da energia normalizada inicial do feixe γ_e . Neste caso, existe uma faixa de valores para a energia do feixe sobre a qual a máxima emissão acontece, não pode ser muito baixa ($\lesssim 23$) ou muito alta ($\gtrsim 80$).

O processo de evolução da dinâmica de emissão é mostrado nas figuras (6.3) e (6.4). Na primeira figura ($\bar{\delta} = 3.47 \times 10^{-4}$), podemos observar que o processo de amplificação da onda acontece devido a um abrupto crescimento não linear de uma onda de carga espacial, criada pela interação do feixe com o potencial ponderomotivo. Este forte crescimento produz perturbações na densidade do feixe que irão gerar um crescimento abrupto (*steepening*) no perfil da onda de radiação. Desta forma, esta densidade atinge um valor critico para logo cair abruptamente, analogamente a um processo de *wave breaking*. Ou seja que a criação da onda não linear do carga espacial, atinge seu máximo valor simultaneamente com a emissão máxima do campo mostrando o processo de máxima transferência de energia.

A figura (6.4) também mostra a evolução da radiação, para um valor maior de *detuning* 2.5×10^{-3} . Vale dizer, que estamos "mais afastados da ressonância". Neste caso a amplificação da onda é relativamente pouco significativa quando comparada com o caso anterior o que corresponde ao crescimento do perfil da densidade local não suficientemente intensa para atingir a transferência máxima.

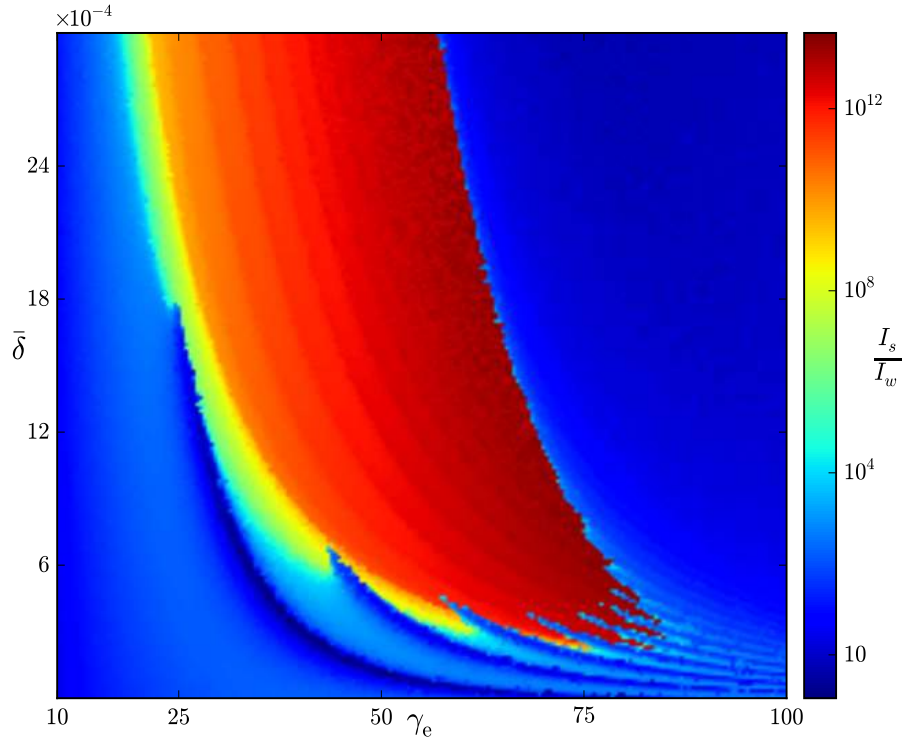


Figura 6.2: Potencia Relativa de Saída para diferentes valores do *detuning* $\bar{\delta}$ e energia inicial . $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ com $a_w = 0.6, n_0 = 1.0 \times 10^9, \varphi_0 = \pi$

Os resultados mostrados neste capítulo foram publicados na referencia [46].

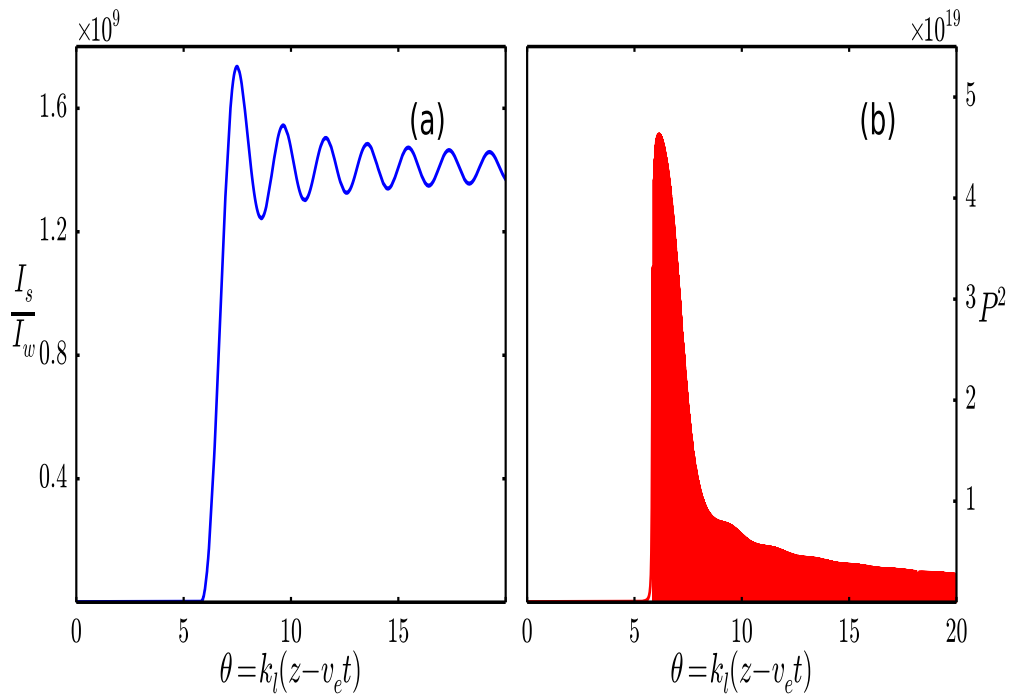


Figura 6.3: Evolução da intensidade de saída (a) o perfil da densidade do elétron (b): $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ com $\bar{\delta} = 3.47 \times 10^{-4}$ e a fase inicial $\varphi_0 = \pi$.

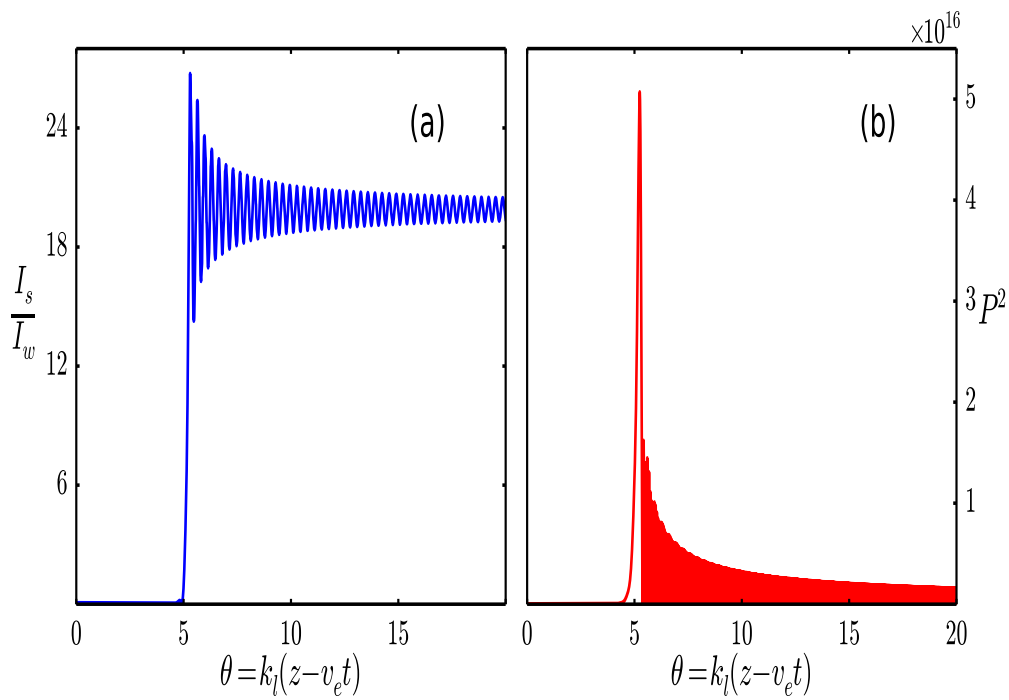


Figura 6.4: Evolução da intensidade de saída (a) o perfil da densidade do elétron (b): $a_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ com $\bar{\delta} = 3.47 \times 10^{-4}$ e a fase inicial $\varphi_0 = \pi$.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta tese desenvolvemos um modelo de fluido quântico para descrever um Free-electron Laser operando nas faixas dos raios X e γ . Nesse modelo, os efeitos devido ao momento linear de recuo dos elétrons e dos fótons, *recoil*, são dados através do potencial de Bohm, que acumula toda informação quântica (difração quântica, tunelamento, etc) sobre o sistema. Um feixe de elétrons relativísticos, frio e não degenerado, é considerado como um plasma quântico frio, que interage com um laser usado como *wiggler* eletromagnético, em que os efeitos das oscilações espaciais de carga são levados em consideração. O modelo está limitado dentro da aproximação unidimensional, onde os efeitos transversais não são levados em consideração, assim como também o escorregamento da onda de radiação (*slippage*) e os efeitos de difração.. A partir do modelo apresentado, deduzimos um sistema de equações não lineares acopladas, que descreve a interação de três ondas, em que o modo de plasma é excitado pela atuação da onda ponderomotiva, que resulta do batimento entre o *wiggler* óptico e a onda da radiação emitida. Levamos em conta a aproximação de variação lenta no espaço e no tempo (SVEA). Este sistema é resolvido iterativamente usando-se um código computacional desenvolvido neste trabalho na linguagem Python

2.7. Observamos, através dos resultados obtidos, que esse modelo hidrodinâmico para descrever a interação em um FEL é uma alternativa mais simples e prática em relação ao modelo de macro partículas, utilizado na simulação desse tipo de lasers. O modelo de macro partículas falha quando se quer distribuir mais de uma macro partícula em um poço de potencial ponderomotivo, gerado por ondas eletromagnéticas de comprimentos de onda ultracurtos.

A interação do FEL é analisada no espaço de fases dos parâmetros (*detuning* vs fase inicial e *detuning* vs energia do feixe), no qual se observa que a intensidade da radiação emitida pelo FEL pode atingir valores próximos ao conhecido "Limite de Schwinger" ($10^{29}W/cm^2$). De acordo com os resultados obtidos, para as regiões onde este limite é ultrapassado, o modelo desenvolvido nesta Tese não é válido. Faz-se, pois, necessário uma melhor descrição através da Teoria Quântica de Campos. Notamos que esta alta intensidade da radiação emitida é devida à formação de uma intensa onda de cargas espaciais, que surge da interação do feixe de elétrons com o potencial ponderomotivo. Esta onda de cargas espaciais se quebra, transferindo sua intensa energia para a radiação espalhada.

Os resultados obtidos sugerem que podemos desenvolver experimentos para geração de Free-electron laser, na faixa dos Raios X e γ , com pequenas dimensões (*tabletop*) e com feixe de elétrons de baixa energia. As características otimizadas para experimentos deste tipo seriam um feixe com uma densidade $n = 1.0 \times 10^9 cm^{-3}$ com uma energia de $120 GeVs$ (o que precisaria um comprimento de 6 metros para a produção), e um laser como *wiggler* de intensidade $2.3 \times 10^{18} W/cm^2$, com um comprimento de onda de $\lambda = 6.5 \times 10^5 cm$ e um pulso semente de intensidade $I_s = 1.32 \times 10^{17} W/cm^2$. Com essas características, o laser pode atingir intensidades de saída da ordem de $10^{20} - 10^{26} W/cm^2$, como pode se observar nos resultados. A região de interação do sistema é da ordem de 5-20 comprimentos de onda $\lambda_s = 4.52 \times 10^{-9}$.

Como perspectivas de trabalhos futuros poderíamos mencionar as seguintes. Considerar os termos transversais na dinâmica feixe e assim poder incorporar o momento angular orbital (OAM) e estudar os efeitos sobre a radiação de saída para possíveis aplicações praticas. Resolver as equações de movimento do sistema considerando a variável temporal. Também levar em conta os efeitos do escorregamento da onda (slippage), que levaria nosso modelo a um nível mais realístico. Finalmente seria interessante investigar a possibilidade de atingir um cenário tipo SASE (*spontaneous auto amplification*)[44] para esse tipo de sistema.

Apêndice

Apêndice1

A equação (3.5) onde $\Gamma_e = (\hbar^2(\vec{k}_e^2 - 2i\vec{k}_e \cdot \vec{\nabla} + \nabla^2) + mc^2)^{1/2}$ pode-se escrever:

$$\Gamma_e = [\hbar^2 k_e^2 + m_e^2 c^2]^{1/2} + \frac{i\hbar \vec{k}_e \cdot \vec{\nabla}}{k_e(1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2})^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{\hbar \nabla^2}{k_e(1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2})^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{\hbar (\vec{k}_e \cdot \vec{\nabla})^2}{(k_e(1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2}))^{3/2}} \quad (7.1)$$

daqui:

$$\Gamma_e = \hbar k_e [1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2}]^{1/2} + \frac{i\hbar}{k_e [1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2}]^{1/2}} \vec{k}_e \cdot \vec{\nabla} + \frac{\hbar}{2k_e [1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2}]^{1/2}} [\nabla^2 + (1 - \frac{m^2 c^2}{k^2 \hbar^2}) (\hat{e}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla})^2], \quad (7.2)$$

e ser reduzida do seguinte modo,

$$\Gamma_e = \frac{\hbar}{c} \Omega_e^{1/2} + \frac{c\hbar}{2\Omega_e^{1/2}} [2\vec{k} \cdot \nabla + \nabla^2 + (1 - \frac{m^2 c^2}{k^2 \hbar^2}) (\hat{e}_{\parallel} \cdot \nabla)^2] \quad (7.3)$$

Apêndice2

Nesta parte do trabalho, vamos a mostrar como podemos deduzir a expressão que define o potencial ponderomotivo usando as definições desenvolvidas no capítulo. Podemos partir do fato de que um elétron num campo eletromagnético sente uma força ponderomotiva

dada pela seguinte equação

$$\vec{F}_p = -\nabla V, \quad (7.4)$$

onde,

$$V = mc^2\gamma = mc^2[\gamma_e^2 + \vec{a}_t \cdot \vec{a}_t^*]^{\frac{1}{2}}; \quad (7.5)$$

que corresponde ao potencial ponderomotivo que não é outra coisa que a energia do relativista do feixe, onde $\gamma_e = \sqrt{1 + p_z^2/m_e^2 c^2}$ é a energia inicial do feixe. p_z é o momento linear do elétron e $\vec{a}_t = \vec{a}_w + \vec{a}_s$ e o campo total atuante sobre o feixe, que pode ser escrito explicitamente como:

$$\begin{aligned} \vec{a}_t \cdot \vec{a}_t^* &= (\vec{a}_s + \vec{a}_w) \cdot (\vec{a}_s^* + \vec{a}_w^*) \\ &= \vec{a}_s \cdot \vec{a}_s^* + \vec{a}_w \cdot \vec{a}_w^* + \vec{a}_w \cdot \vec{a}_s^* + \vec{a}_s \cdot \vec{a}_w^* \\ &= \frac{1}{2}|a_s|^2 + \frac{1}{2}|a_w|^2 + a_s^* a_w e^{-i\theta} + a_s a_w^* e^{i\theta}; \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde temos usado os reescalamentos do capítulo 4.

Se consideramos a transformação de escala sobre a radiação $a_s = \mathbf{a}e^{-i\theta}$ Eq[4.32] e sendo a_w real e constante, isto é, sem considerar uma *Pump Depletion*; podemos escrever o potencial ponderomotivo normalizado com mc^2 , como:

$$\gamma = [\gamma_e^2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2 + \frac{1}{2}a_w^2 + a_w(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)]^{1/2}. \quad (7.7)$$

O potencial vetorial do campo da radiação $\mathbf{a}$ pode ser levado na forma polar $\mathbf{a} \rightarrow a \exp(i\varphi)$ sendo a o modulo e φ a fase do campo da radiação; com isto temos que

$$\gamma = [\gamma_e^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a_w^2 + 2a_w a \cos(\varphi)]^{1/2} \quad (7.8)$$

Sendo a e a_w números reais.

Bibliografia

- [1] J.M.J. Madey, *J. Appl. Phys.*, **42**, 1906 (1971).
- [2] <http://www.xfel.eu/>
- [3] <https://www6.slac.stanford.edu/facilities/lcls.aspx>.
- [4] <http://www.xfel.spring8.or.jp/>
- [5] Zhirong Huang, *Nature Photonics*, **6**, 505 (2012).
- [6] E. Hand, *Nature*, **461**, 708 (2009).
- [7] G. Dattoli, A. Renieri, A. Torre *Lectures on Free Eletron Laser Theory* (World Scientific,1993).
- [8] T. Ishikawa et al., *Nature Photonic*, **6**, 540 (2012).
- [9] H. Motz *J. Appl. Phys.*,**22** , **527** (1953)
- [10] C. F. Weizsäcker, *Z. Phys.* , **88**, 612 (1934)
- [11] E. J. Williams Kgl. Danske Videnskab Mat.-fys. Medd, **13** (1935)
- [12] W. B. Colson, *Phys. Lett. A*,**64**, 190-192 (1977)

- [13] A. M. Kondradenko and E. L. Saldin *Part Accel.*, **10**,207 (1980)
- [14] A. Gover *J. Quantum Eletron***QE-17** 1196-1215 (1981)
- [15] A. Gover , A. Yariv, *Appl. Phys.*,**16**, 121-138 (1978)
- [16] G. Dattoli et. al. *J. Quantum Eletron*,**QE-17**, 1371-1387 (1977)
- [17] N. L. Tsintsadze, J. T. Mendonça, and L. N. Tsintsadze, *Phys. Plasmas* ,**5**, 3512 (1998)
- [18] R. Bonifacio et. al.*Opt. Commun.*,**40**, 219-223,(1982)
- [19] R. Bonifacio, F. Casagrande, *J. Opt. Soc. Am. B* , **Vol. 2**, 250 (1985)
- [20] A. Serbeto, J T Mendonça, Tsui K H and Bonifacio R, *Phys. Plasmas*, **15** (2008)
- [21] T. Tajima, *New Trends in Plasma Physics*, **29**,(2009)
- [22] J. K. Mcleever and M. V. Fedorov, *Sov. Phys. JETP*, **49**(6), 1012(1979).
- [23] I. V. Smetanin, *Laser Physics*, **7**(2), 318(1997)
- [24] G. Preparata, *Phys. Rev. A*, **38**, 233 (1988).
- [25] J.M.J. Madey: Nouvo Cimento 50B 54 1979
- [26] R. Bonifacio, N. Piovella, and G. R. M. Robb, *Nucl. Instrum. Methods A*, **543**, 645(2005).
- [27] R. Bonifacio, N. Piovella, G. R. M. Robb and A. Serbeto, *Phys. Rev. A*,**79**, 015801(2009)
- [28] R. Bonifacio, M. M. Cola, N. Piovella, and G. R. M. Robb, *Europhys.Lett.*, **69**, 55(2005).

- [29] A. Serbeto, J. T. Mendonça, K. H. Tsui, and R. Bonifacio, *Phys. Plasmas*, **15**, 013110(2008).
- [30] A. Serbeto, L. F. Monteiro, K. H. Tsui K. H., and J. T. Mendonça, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **51**, 124024(2009).
- [31] L. F. Monteiro, A. Serbeto, K.H. Tsui, J. T. Mendonça, and R. M. O. Galvão, *Phys. Plasmas*, **20**, 073101(2013).
- [32] B. Eliasson and P. K. Shukla, *Phys. Rev. E*, **85**, (2012).
- [33] F. Haas, *Theory of Quantum Plasmas* (Springer, New York, 2011).
- [34] J. T. Mendonça, *Phys. Plasmas*, **18**, 062101 (2011).
- [35] E. Madelung *Journal Zeitschrift für Physik A*, **Vol. 40**, Numbers 3,4; 332-326 (1927)
- [36] G. Manfredi, F. Hass, *Phys. Rev. B*, **64**, 075316-1(2001).
- [37] F. Haas, L. G. Garcia, and J. Goedert, *Phys. Plasmas*, **10**, 10, 3858 (2003)
- [38] P. K. Shukla and B. Eliasson, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 096401 (2007).
- [39] Bohm, D and Vigier, *J. Phys. Rev.*, **Vol. 96**, 208 (1954).
- [40] Wilhelm E. *Phys. Rev. D*, **Vol. 1**. 2278 (1970)
- [41] Feynman, R., P Leighton, R. B Sands **Lectures on Physics** Vol. III, ch 21.
- [42] Sergei V. Bulanov, Timur Esirkepov and Toshiki Tajima, *Phys. Rev. Lett.*, **91**(8), 085001(2003).
- [43] J. T. Mendonça, A. Serbeto, and R. M. O Galvão, *Phys. Plasmas*, **21**, 053109(2014).
- [44] B. Bonifacio, F. Casagrande, G. Cerchioni, L. de Salvo Souza, P. Pierini and N . Piovella, *la Revista del Novo Cimento della Società Italiana di Fisica*, **9**, 1990.

- [45] E. Esarey, P. Sprangle, *IEEE Trans. on Plasma Science*, **24**, 2 (1996)
- [46] H. M. Silva, A. Serbeto, R. M. O. Galvão, J. T. Mendoça and L. F. Monteiro, *European Physics Letters*, **108** 65002(2014)